01 Verpakking

Auteur: Martin Weiser

Opgave

Bij het inpakken van wijnflessen in kartonnen vierkantige geschenkdozen, dat zijn dozen waarvan de zijwanden een vierkant vormen, viel het de kerstman op dat er nogal wat lucht mee verpakt wordt. Bovendien de onbenutte lege hoeken van de geschenkdoos 'gebruiken' nogal wat van het dure karton.
„Als ik nu de hoeken ga afsnijden en daarna zorg voor een vlakke verbinding, dan ontstaat er een achtkantige doos, waarvoor minder karton nodig is en waarin een wijnfles nog prima past “,
bedacht de kerstman. Met gezwinde spoed ging de kerstman weer aan het werk en omhulde de volgende flessen met achtkantige dozen. Tot dat hij vond dat ook voor de achtkantige dozen te veel karton nodig was.
„Als ik nogmaals de hoeken afsnij dan heb ik nog minder karton nodig“,
sprak hij in zichzelf en vouwde een zestienkantige geschenkdoos. Zijn ambities gingen nog verder en al snel werd hem duidelijk dat een doos met een cilindrische wand het minste karton nodig heeft. Echter, het karton laat zich niet zo gemakkelijk exact tot een cylinder ombuigen. Wel kan hij dor vouwen steeds het aantal hoeken verdubbelen. Dit doet de kerstman net zolang tot dat de totale omtrek van de zijwand minder dan één duizenste langer is, dan die bij de optimale cilindrische omhulling.

Vraag: Hoeveel hoeken heeft dan zijn verpakking?

Mogelijke antwoorden:

1. 16
2. 24
3. 32
4. 42
5. 64
6. 95
7. 128
8. 256
9. 512
10. De kertsman blijft maar vouwen.

DIGITALER MATHE KALENDER
DFG-Forschungszentrum MATHEON
Mathematik für Schlüsseltechnologien

0.2 De Kerstplaneet

Auteurs:
Judith Keijsper (TU Eindhoven; jkeijspe@win.tue.nl)
Gerhard Woeginger (TU Eindhoven; gwoegi@win.tue.nl)

Opgave

Maar weinig mensen kennen de Kerstplaneet in ons zonnestelsel, die in dezelfde baan om de zon draait als de aarde. Dit is omdat de aarde en de Kerstplaneet altijd diametrale (tegenoverliggende) posities innemen in hun gemeenschappelijke baan, zodat de zon altijd tussen de aarde en de Kerstplaneet in staat en men de Kerstplaneet vanaf de aarde dus niet kan zien. De Kerstplaneet is wat kleiner dan de aarde. Hij heeft de vorm van een perfecte bol, en zijn rotatie-as (die door zijn Noord- en Zuidpool loopt) staat loodrecht op zijn baan. Op de Kerstplaneet worden afstanden gemeten in hulst (h) en in kilohulst(kh). Natuurlijk geldt $1\,kh = 1000\,h$.

Op het noordelijk halfrond van de Kerstsplaneet liggen twee punten A en B zodat A precies $820\,kh$ ten noorden ligt van B. In beide punten staat een vlaggenstok van $10h$ hoog. Op de 43ste dag van de maand Quatember, om 26:00 uur in de middag wijst de schaduw van beide vlaggenstokken in noordelijke richting. De schaduw van de vlaggenstok in A heeft lengte $10\,h$ en de schaduw van de vlaggenstok in punt B heeft lengte $7\,h$.

Vraag: Wat is de omtrek van de Kerstplaneet (plus of min hoogstens 500 kh)?

Mogelijke antwoorden:

1. 20 500 kh
2. 21 500 kh
3. 22 500 kh
4. 23 500 kh
5. 24 500 kh
6. 25 500 kh
7. 26 500 kh
8. 27 500 kh
9. 28 500 kh
10. 29 500 kh

03 Het kan er maar ´e´en zijn!

Auteur: Falk Ebert

Opgave

Bij het samenstellen van de opgaven voor de adventskalender heeft de kerstman van een van de opgaven de opgaventekst verloren. Maar omdat bij de opgaven van de gegeven mogelijke antwoorden 1 tot en met 10 er slechts één antwoord de juiste is, weet de kerstman dat ook zonder opgaventekst deze opgave op te lossen is.

Mogelijke antwoorden:

1. Nr. 6 is juist.
2. Het nummer van de juiste oplossing is even.
3. Òf Nr. 5 òf Nr. 6 is juist.
4. Het nummer van de juiste oplossing is een kwadraat.
5. Nr. 3 of Nr. 8 is juist.
6. Nr. 7 is niet juist
7. Nr.3 of Nr. 8 is onjuist.
8. Het nummer van de juiste oplossing is geen priemgetal.
9. Nr. 4 tot en met Nr. 7 zijn allen onjuist.
10. Het is niet mogelijk om een oplossing te vinden waarvan het nummer uit één cijfer bestaat, die niet tot een tegenspraak leidt.

0.4 Chocolate Chip Cookies

Auteur: Gregor Heyne

Projekt: E2

Opgave

De bakker van de kerstman bakt zogenaamde Chocolate Chip Cookies, dit zijn koekjes met daarin kleine bolletjes chocola (chocolate chips). Hij verdeelt in totaal N chips willekeurig over een hoeveelheid koekjesdeeg, waarvan hij 100 koekjes gaat bakken. Hij wil voor 90% zeker zijn dat elk koekje minstens één chip bevat en vraagt zich af hoe groot N dan moet zijn.

Vraag: Bepaal N, waarbij je mag aannemen dat de chips onafhankelijk van elkaar in een koekje kunnen voorkomen.

Mogelijke antwoorden:

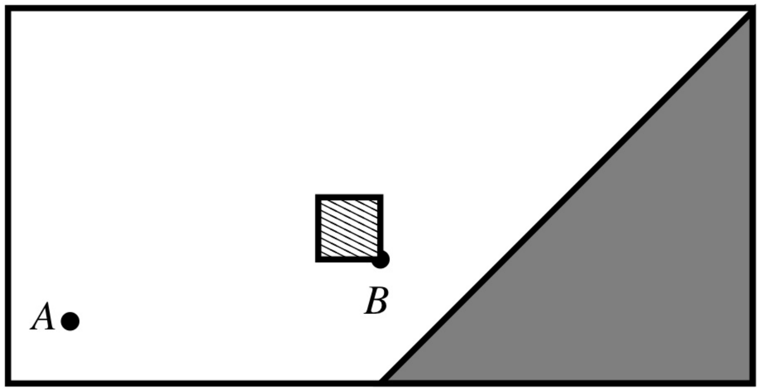
1. 50
2. 100
3. 276
4. 355
5. 492
6. 537
7. 683
8. 705
9. 846
10. 976

05 Koekenbakkers

Auteurs:
Cor Hurkens (TU Eindhoven; c.a.j.hurkens@tue.nl)
Frits Spieksma (KU Leuven; Frits.Spieksma@econ.kuleuven.be)

Opgave

De kerstman heeft talloze bakkerijen. In bakkerij met nummer 182-B72 wordt peperkoek met chocolade overgoten. De bakkerij heeft een rechthoekige vorm en is 24 meter lang en 12 meter breed; hij is verborgen onder de grond en kan alleen met een lift bereikt worden. De vierkante liftschacht heeft een zijde van 2 meter, en zijn noordoosthoek ligt exact in het midden van de bakkerij; in de volgende schets is de liftschacht aangegeven als een gearceerd vierkantje ingetekend in de plattegrond van de bakkerij. In de zuidoosthoek van de bakkerij ligt een gigantisch driehoekvormig bassin gevuld met vloeibaar chocoladeglazuur. De zuidzijde en de oostzijde van het bassin meten elk 12 meter. Punt A ligt op twee meter van de zuidzijde en twee meter van de westzijde van de bakkerij. Punt B ligt op 4 meter van de zuidzijde en 12 meter van de westzijde van de bakkerij, en valt dus samen met de zuidoosthoek van de liftschacht.
Tegen de wanden van de bakkerij staan vele rekken met schappen waarop de peperkoeken liggen.



Koekenbakker Bastiaan staat op punt A van de bakkerij en neemt het werkplan van deze dag door. Hij moet de volgende taken verrichten:

- Eerst moet hij naar het noordelijk rek gaan en daar een peperkoek van een van de bovengelegen schappen halen.
- Bastiaan moet die peperkoek naar het chocoladebassin brengen en daar in de chocolade dompelen.
- Dan moet Bastiaan die peperkoek terugbrengen naar het noordelijke rek en de koek in een van de onderste schappen neerleggen.
- Vervolgens moet Bastiaan naar de westzijde gaan en daar een van de daargelegen peperkoeken pakken.
- Die peperkoek moet tenslotte op een willekeurige plek aan de zuidzijde weer in het schap gelegd worden.
- Daarna moet Bastiaan zich naar punt B begeven en in de lift stappen.

Bastiaan verricht zijn taken en gaat daarbij de kortst mogelijke weg van A naar B (via noordzijde, bassin, noordzijde, westzijde, zuidzijde). We nemen aan dat Bastiaan puntvormig is en dat hij op zijn weg niet dwars door de lift kan lopen en ook niet in het chocoladebassin belandt.

Hoe lang is die kortst mogelijke weg?

Antwoordmogelijkheden:

1. $59,60$m of minder
2. tussen $59,60$ en $59,70$ meter
3. tussen $59,70$ en $59,80$ meter
4. tussen $59,80$ en $59,90$ meter
5. tussen $59,90$ en $60,00$ meter
6. tussen $60,00$ en $60,10$ meter
7. tussen $60,10$ en $60,20$ meter
8. tussen $60,20$ en $60,30$ meter
9. tussen $60,30$ en $60,40$ meter
10. $60,40$m of meer

06 Geheimschrift

Auteur: Bensi N.

Opgave

Sinds enige maanden is er sprake van een heftig rumoer in het rijk van de kerstman. De werkgemeenschap van kerstkabouters eist meer medezeggenschap in het productieproces en eist de afschaffing van de 20-urige werkdag. De kerstman is niet bereid om op die eisen in te gaan, waarop er een algehele staking in het rijk van de kerstman uitbrak. De produktie ligt daardoor al enige tijd stil en de kerstman is gedwongen om maatregelen te treffen. Lange tijd ging hij bij zichzelf in beraad om te na te gaan op welke wijze hij hier mee om moest gaan en kwam ten slotte op een goed idee. Dit idee versleutelde hij in een geheimschrift en stuurde het naar zijn trouwe Ouderraad in zijn rijk. Echter de kerstkabouters hebben de boodschap onderschept. Die boodschap bevat de volgende gecodeerde tekst.

IIDTNESIENTEEIBRHVCTNEADESKRMNTAMA,AVNRAEPDOTLSEE
VLRNEADEPZOAEGVIB. NRIELNEJHIEBKNREBEVIFROEBGNREWE.
IEEDZEEHTRTESVNEITKD, IGRJVNTAI5MJER0U.EOMRAEAWJNIIG
ZNNAEKMNNEID VNNPEOEEDWSTBIWCEITLHETESRKWI. RPODE
SRSCM.OMA.ADWREREEKIKLJMGEOLJEIHIKEVODODKRERTESA
IMNHTSEESVRRKTEEVKNNEAHGETETESVRIRUDVMECTOHOASM
ADANKREETASKOTBUR.ES

De kerstkabouters probeerden natuurlijk onmiddellijk het geheimschrift te ontcijferen. Eerst tasten zij volledig in het duister totdat een van de kerstkabouters zich herinnerde dat een lid van de Ouderraad vertelde dat de kerstman zich als hobby met Cryptografie bezig hield en in een oud leerboek over kerstmannencryptografie een oeroud ontcijferingsalgoritme had gevonden, waarvan de kerstman nogal onder de indruk was. Op een of nadere manier had de algoritme betrekking op het onderverdelen van tekst in blokken van dezelfde omvang. Met deze aanwijzing waren de kerstkabouters in staat om de tekst te ontcijferen.

Vraag: Welke van de onderstaande antwoorden vonden de kerstkabouters in het geheimschrift?

1. De staking met geweld stoppen en de kerstkabouters dwingen weer aan het werk te gaan.
2. De gehele produktie permanent naar in de lageloon landen te laten verplaatsen.
3. Kerstmis overslaan en op vakantie gaan.
4. De blauwe katten om raad vragen .
5. De arbeidsvoorwaarden verbeteren en ingaan op de eisen van de kerstkabouters.
6. De stakers onder dwang Soma toe te dienen.
7. In plaats van de kerstkabouters wiskunde-docenten van de Duitse middelbare scholen in te zetten bij het produktieproces.
8. Op een avond met de drie oudsten van "Robben Helgolands "gaan eten en zich beraden over het verdere verloop van de staking.
9. De kerstman vraagt zijn grootmoeders om advies te laten vragen.
10. In plaats van kado's schenkt de kerstman de kerstkabouters om later weer nieuwe aan te stellen.

0.7 Rudolf, het laktose-ıntolerante rendier

Auteur: Simon R¨osel

Vertaling: Aart Blokhuis.

Opgave

Dit jaar is Rudolf, het trouwe roodgeneusde rendier en de beste helper van de Kerstman in een slechte bui. Hij denkt niet graag terug aan het afgelopen jaar, toen hij van de Kerstman, zoals elk jaar, een prachtige adventskalender als voorschot op zijn kerstloon gekregen had. De adventskalender verborg achter elk deurtje een lekker stuk melkchocola, waar Rudolf zo dol op is. Maar precies met Kerst kreeg Rudolf las van stevige buikkrampen, waarop de locale rendierdokter, Dr. med. Icijn een acute lactoseïntolerantie diagnosticeerde.
De dokter vertelde hem dat hij ten hoogste op twee opeenvolgende dagen lactosehoudende producten kon gebruiken, omdat hij anders precies op de eerste Kerstdag opnieuw last zou krijgen van constipatie.
Gelukkig heeft de Kerstman dit jaar opdracht gegeven een alternatieve adventskalender samen te stellen, maar helaas zijn de elven weer slordig geweest. In plaats van, zoals opgedragen, overal lactosevrije chocola te gebruiken hebben de elven te hooi en te gras ook stukken echte melkchocola achter de deurtjes verstopt, die tot overmaat van ramp zowel qua smaak als qua uitzien niet van het lactosevrije alternatief te onderscheiden zijn.
Na aandringen van de Kerstman gaven de elven toe, dat ze weliswaar niet precies meer wisten hoeveel melkchocola ze gebruikt hadden, maar wel dat ze achter elk deurtje met dezelfde waarschijnlijkheid van 50% lactosevrije, of lactosehoudende chocola hadden verstopt, en wel onafhankelijk van welke

soort chocola zich achter de andere deurtjes bevond. En een nieuwe kalender in elkaar te knutselen zou in deze tijden van economische crisis „praktisch onmogelijk zijn “.
Terneergeslagen neemt Rudolf de kalender van dit jaar in ontvangst. Maar dan bedenkt hij opeens dat hij er in ieder geval zeker van zijn kan, dat hij de chocola achter de eerste twee deurtjes zonder problemen op kan eten. Stoutmoedig verklaart hij: „Ik eet elke dag de chocola uit de adventskalender, zolang de kans om ziek te worden kleiner is dan 50% - dat zou tot vlak voor kerstmis moeten kunnen! “
Tussendoor een dag overslaan is voor Rudolf natuurlijk niet aan de orde, maar op de dag dat de kans om ziek te worden 50% of meer is, dan zal hij ook echt geen chocola eten, dat belooft hij althans de toch wel wat bezorgde Kerstman.

Tot (en met) welke dag kan Rudolf chocola eten, als hij zijn belofte gestand wil doen. Het eerste deurtje op de adventskalender is 1 december.
Mogelijke antwoorden:

1. 4 december
2. 5 december
3. 6 december
4. 7 december
5. 9 december
6. 11 december
7. 13 december
8. 15 december
9. 17 december
10. 24 december

0.8 Wintertocht

Auteur: Cor Hurkens (TU Eindhoven; c.a.j.hurkens@tue.nl)

Opgave

Knecht Ruprecht plant een wintertochtje langs de schilderachtige Noordpoolroute. Deze route is 2000 km lang en is onderverdeeld met kilometerpaaltjes; de eerste van deze kilometerpaaltjes heeft nummer 0, en de laatste heeft nummer 2000. Knecht Ruprecht reist op zijn oude motorslede, die met hout wordt gestookt en aangedreven. Op de motorslede is plek voor één lading hout, waarmee onze knecht een afstand kan afleggen van exact 420 kilometer. Uit zijn vorige wintertochtjes resteren her en der nog enkele houtvoorraden langs de route:

- Aan het begin van de route (bij kilometerpaal 0) liggen nog 4 houtladingen.
- bij kilometerpaal 249 ligt 7/4 houtlading;
- bij kilometerpaal 894 ligt 8/5 houtlading;
- bij kilometerpaal 978 liggen 3 houtladingen.

Knecht Ruprecht begint bij kilometerpaal 0 met op zijn slede een lege voorraad hout. Hij wil graag de kilometerpaal met het hoogst mogelijke nummer zien te bereiken, waarbij hij goed gebruik maakt van de bestaande houtvoorraden en zelf eventueel nieuwe voorraadpunten opzet.

(Hij kan bijvoorbeeld met een volle lading reizen tot aan kilometerpaal 140, daar één derde van een volledige houtlading achterlaten, weer terugreizen naar kilometerpaal 0, en dan deze tussenvoorraad benutten bij een latere passage.)

De allerbeste manier om de houtvoorraden te benutten brengt knecht Ruprecht tot aan de kilometerpaal met nummer x. Wat weten we van de waarde van x?

Antwoordmogelijkheden:

1. $x \leq 632$
2. $633 \leq x \leq 847$
3. $848 \leq x \leq 891$
4. $x = 892$
5. $x = 893$
6. $894 \leq x \leq 977$
7. $978 \leq x \leq 1681$
8. $x = 1682$
9. $x = 1683$
10. $1684 \leq x \leq 2000$

0.9 **Adventslotto**

Auteur: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven; `h.g.termorsche@tue.nl`)

Opgave

Wichtel Willi is trekkingsleider van de Wichtelhausener Adventslotto. De trekkingen vinden dagelijks plaats gedurende de adventsperiode van 1 tot 24 December, dus in totaal 24 trekkingen. Bij de Adventslotto worden er slechts drie getallen uit de getallen 1 tot en met 20 getrokken. Er zijn dus 20*19*18/6=1140 verschillende resultaten mogelijk. De kerstman berekent de kans dat een resultaat zich in dezelfde adventsperiode herhaalt en stelt vast dat die kans erg klein is. Hij belooft Willi een extra ronde met de rendierslede wanneer dit daadwerkelijk plaatsvindt. Wichtel Willi wilde altijd al met de rendierslede een extra rondje maken. Hij vermoedt dat zijn kansen op een extra ronde groter worden wanneer de 1140 verschillende resultaten van een trekking niet allemaal even waarschijnlijk zijn. Aldus ging Willy de Lottomachine zodanig manipuleren dat de kans op ieder van de resultaten $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$ $\{3, 4, 5\}$ gelijk is aan 5 % en de kans op elk van de overige 1137 resultaten gelijk is aan $(85/1137)\% \approx 0.075\%$. Voor deze gemanipuleerde machine berekent Willi nogmaals de kans p dat binnen de 24 trekkingen een resultaat zich minsten een keer herhaalt.

De kans p is gelijk aan (afgerond op gehele procenten):

Antwortmöglichkeiten:

1. $p = 85\%$,
2. $p = 91\%$,
3. $p = 63\%$,
4. $p = 70\%$,
5. $p = 22\%$,
6. $p = 60\%$,
7. $p = 78\%$,
8. $p = 86\%$,
9. $p = 95\%$,
10. $p = 69\%$.

10 Kerstboom versieren

Auteur: Hans Zantema (TU Eindhoven; h.zantema.nl@tue.nl)

Opgave

Een kerstboom wordt versierd met klokken en ballen. Aanvankelijk liggen er vijf ballen (B) en vier klokken (K) op een rij in het patroon BKBKBKBKB. Een oude traditie wil dat vóór dat de boom versierd mag worden deze rij moet worden uitgebreid met de volgende spelregel, die toegepast dient te worden zolang als mogelijk is:

Als er een klok tussen twee ballen ligt, kan die klok met de linkerbal worden verwisseld, en wordt er rechts van de klok een extra bal (uit een beschikbare voorraad) toegevoegd. Het patroon BKB wordt dus vervangen door KBBB.

Welke verzameling van getallen beschrijft exact het aantal ballen dat uiteindelijk in de boom kan hangen wanneer de oude traditie correct wordt gevolgd?

Mogelijke antwoorden:

1. $\{n \in \mathbb{N} \mid 7 \leq n \leq 25\}$
2. $\{7, 10\}$
3. $\{7, 10, 13, 16, 17, 19, 22, 24, 25, 28, 31\}$
4. $\{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 31 \text{ en } x \text{ is oneven}\}$
5. $\{7, 10, 13, 16, 17, 19, 22, 25, 28, 31\}$
6. $\{7, 10, 13, 15, 17, 19, 22, 24, 25, 31, 33\}$
7. $\{7, 10, 16, 17, 19, 22, 25, 28, 35\}$
8. $\{7, 13, 16, 17, 19, 22, 24, 25, 28, 31\}$
9. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10\}$
10. Geen van deze mogelijkheden.

11 Chaos in de werkplaats van de Kerstman

Auteurs: Annegret Glitzky, Matthias Liero und Alexander Mielke

Opgave

In de werkplaats van de Kerstman werken gelijktijdig twee elfenteams aan het herstellen van speelgoed: Team (A) en Team (B). De Kerstman is bepaald niet tevreden over het efficiënte werken van de beide teams en onderzoekt daarom hun werkgewoontes. Hij ziet dat zo nu en dan een elf uit team A en een elf uit team B elkaar ontmoeten, in de pauzeruimte van de werkplaats verdwijnen en daarna weer opduiken. Daarbij zijn er elfen uit team A zichtbaar vermoeid; vaak slapen zij doodeenvoudig op hun werkplek (gelukkig bedienen ze dan geen ingewikkelde machines).
De Kerstman, een oude vos in het modelleren van reactieprocessen, herkent hierin een patroon dat zich met (chemische) reactievergelijkingen laat beschrijven:

$$\text{werkende elf}_A + \text{werkende elf}_B \xrightleftharpoons[\text{terug}]{\text{heen}} \text{pauzeruimte}$$

$$\text{slapende elf}_A \xrightleftharpoons[\text{terug}]{\text{heen}} \text{slapende elf}_A.$$

Omdat er erg veel elfen in de werkplaats werken, mag de Kerstman aannemen dat de aantallen elfen gerepresenteerd kunnen worden door reële getallen en omdat de aantallen met de tijd veranderen ook als functies van de tijd t. Respectievelijk worden de aantallen werkende elfen uit de teams

A en B en de slapende elfen uit team A weergegeven door $E(t)$, $L(t)$ en $S(t)$. Het totale aantal elfen in team A is op tijdstip t dus gelijk aan $E(t) + S(t)$. In Wikipedia vond de Kerstman dat de functies E, L en S geleidelijk met de tijd veranderen en voldoen (Wet van de werkende massa) aan de volgende vergelijkingen.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta E}{\Delta t}(t) &= \big(N^2 - E(t)\cdot L(t)\big) + \big(\alpha S(t) - \beta E(t)\big),\\
\frac{\Delta L}{\Delta t}(t) &= \big(N^2 - E(t)\cdot L(t)\big),\\
\frac{\Delta S}{\Delta t}(t) &= \qquad\qquad\qquad\quad + \big(\beta E(t) - \alpha S(t)\big).
\end{aligned} \tag{$\star$}$$

Hierin stelt $\frac{\Delta Y}{\Delta t}$ de verandering van de functie Y voor in een zeer klein tijdsinterval Δt. Verder zijn $\alpha = \frac{100}{21}\beta$ en $N = 3300$ gegeven positieve constanten, die de Kerstman aan de hand van zijn waarnemingen heeft bepaald.

Bij het begin van de werkzaamheden bevinden zich $E(0) = L(0) = 5000$ werkende elfen van beide teams in de werkplaats en $S(0) = 0$ slapende elfen. Na een lange tijd wordt er een evenwicht bereikt, d.w.z. dat E, L en S niet meer met de tijd veranderen. Deze evenwichtstoestand, aangegeven met de waarden E_*, L_* en S_*, kan afhankelijk van de parameters α, β en N worden berekend uit het stelsel vergelijkingen ($\star$) en de waarden van $E(0)$, $L(0)$ en $S(0)$, dus de waarden van E, L en S aan het begin van de werkzaamheden($t = 0$).

De Kerstman is erg geïnteresseerd in de hoeveelheid werk die de elfen onder deze omstandigheden kunnen verrichten. De assistent van de Kerstman, Harry Elmoltz, weet dat hiervoor de „Entropie“ (Maat voor Chaos)gemaximaliseerd moet worden. Hij was helaas zo dom om hiervoor de precieze formule te vergeten. Toch weet hij dat op de drie waardes van de parameters $(X_1, X_2, X_3) = \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^3$ na, de formule er als volgt uitziet.

$$\mathrm{Entr}_{\boldsymbol{X}}(E, L, S) = X_1\cdot E + X_2\cdot L + X_3\cdot S - E\cdot \ln(E) - L\cdot \ln(L) - S\cdot \ln(S).$$

Hierin is $x \mapsto \ln(x)$ de natuurlijke logaritme. Harry weet ook, dat in de evenwichtstoestand deze Entropie maximaal is, d.w.z.

$$\mathrm{Entr}_{\boldsymbol{X}}(E_*, L_*, S_*) = \max_{(E,L,S)\in\mathbb{R}^3_+} \mathrm{Entr}_{\boldsymbol{X}}(E, L, S).$$

Kun je Harrie helpen de onbekende parameters (X_1, X_2, X_3) te bepalen?

Tip: Er bestaan constanten c_1, c_2 en c_3, zo dat de combinatie $c_1\cdot E(t) + c_2\cdot L(t) + c_3\cdot S(t)$ constant is voor functies $E(t)$, $L(t)$ en $S(t)$ die voldoen aan ($\star$).

Mogelijke antwoorden:

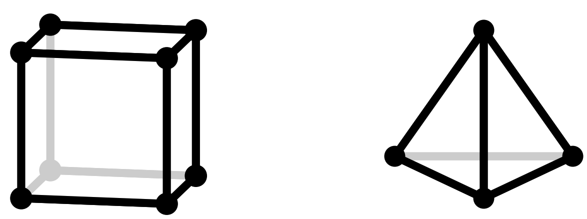
1. $(X_1, X_2, X_3) = (3, 3.63, 0.63)$
2. $(X_1, X_2, X_3) \approx (9, 9.2, 7.4)$
3. $(X_1, X_2, X_3) \approx (15.4, 10.2, 14.7)$
4. $(X_1, X_2, X_3) = (3300, 3300, 3300)$
5. $(X_1, X_2, X_3) = (3000, 3630, 630)$
6. $(X_1, X_2, X_3) = (2 \cdot \alpha, 4.5 \cdot \alpha, 1.5 \cdot \alpha)$
7. $(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 1)$
8. $(X_1, X_2, X_3) = (0, 0, 0)$
9. $(X_1, X_2, X_3) \approx (8, 8.2, 6.4)$
10. $(X_1, X_2, X_3) \approx (2.2, 6.7, 3.6)$

12 Kerstcakejes

Auteur: Bensi N.

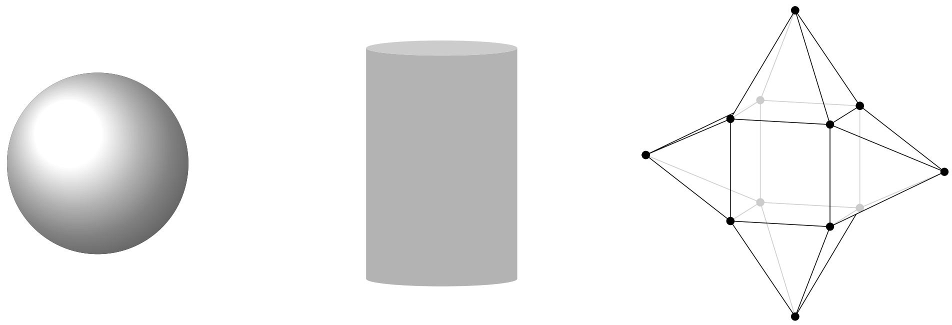
Opgave

In de kerstbakkerij probeert men elk jaar weer nieuwe vormen voor de kerstcakejes te bedenken. Dit jaar heeft dit geresulteerd in kerstcakejes die de vorm van convexe polyeders (veelvlakken) hebben. Een polyeder is een drie dimensionaal geometrisch object, zoals bijvoorbeeld een kubus of een pyramide, dus een objet dat hoekpunten kent en door rechte ribben en platte zijvlakken wordt begrensd. Zulk een polyeder heet convex indien het geen deuken bevat, preciezer gezegd indien de verbindingsrechte van twee willekeurig punten van het polyeder nog geheel tot het polyeder behoort.



De dobbelsteen en het viervlak zijn voorbeelden van convexe polyeders.

Een bol of een cylinder zijn weliswaar convex, maar het zijn geen polyeders omdat de zijvlakken gekromd zijn en dus niet plat.



Bol en cylinder zijn geen voorbeelden van polyeders,
De figuur rechts is een niet convex polyeder.

De afmetingen van de polyeders werden door de geometricus, de chef van de geometrische dienst van het Kerstrijk, aan het kerstkaboutermeisje Ella van de kerstbakkerij meegedeeld. Helaas had de geometricus weinig tijd en daarom moest Ella heel snel aantekeningen maken. In plaats van een uitgebreide beschrijving van elk polyeder heeft ze enkel het aantal hoekpunten e, het aantal ribben k en het aantal zijvlakken f genoteerd. Voor bijvoorbeeld een dobbelsteen geldt: $e = 8$, $k = 12$, en $f = 6$. Helaas is er een foutje in de aantekeningen van Ella geslopen.

Bij welke van de volgende getalcombinaties kan men **niet** een convexe polyeder construeren.

Mogelijke antwoorden:

1. $e = 5$, $k = 8$, $f = 5$
2. $e = 6$, $k = 12$, $f = 8$
3. $e = 10$, $k = 15$, $f = 7$
4. $e = 7$, $k = 13$, $f = 8$
5. $e = 1025$, $k = 3069$, $f = 2046$
6. $e = 60$, $k = 90$, $f = 32$
7. $e = 6$, $k = 14$, $f = 8$

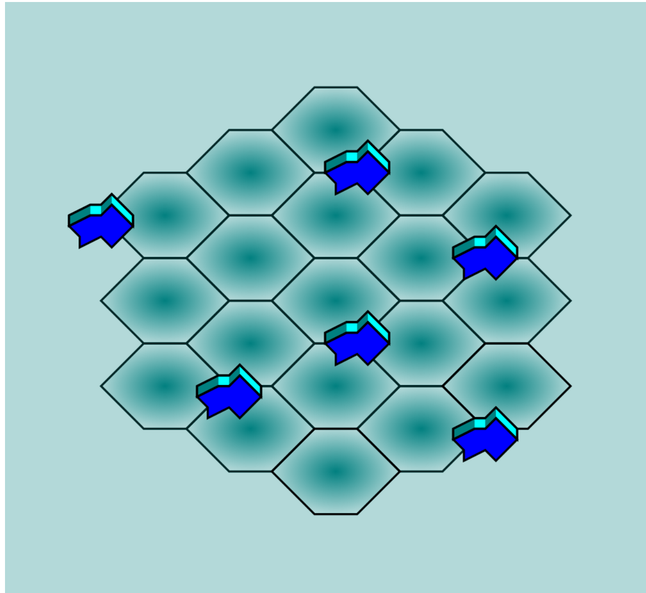
8. $e = 20$, $k = 30$, $f = 12$
9. $e = 8$, $k = 18$, $f = 12$
10. $e = 24$, $k = 36$, $f = 14$

13 IJsvissen

Auteur: Falk Ebert

Opgave

Het is een oeroude traditie onder de noordelijke kabouters: ijsvissen.
Omdat het zo populair is, is het ijsvissen sterk gereguleerd. Silas, de bouwkundig ingenieur, heeft dit jaar weer een stuk ijs afgezet en in toegelaten visstekjes verdeeld. Een kabouter mag op één van de hoekpunten van de zeshoeken een wak hakken en op die plek een paar uur in de vrieskou hopen op een goede vangst.
Om de stabiliteit van het ijs te garanderen, heeft Silas echter verordonneerd dat geen twee wakken direct naast elkaar gemaakt mogen worden. Dat wil zeggen: geen wak mag slechts één zijde van een zeshoek van een ander wak verwijderd zijn.
Een aantal vroege vogels onder de kabouters hebben hun wakken al gehakt. Ze hebben zich keurig aan Silas' regels gehouden, zie figuur. Silas vraagt zich, met het oog op de te verwachten drukte, af, hoeveel hengelaars bij deze beginsituatie in totaal maximaal op het ijs zullen passen.



Mogelijk antwoorden:

1. 19
2. 20
3. 21
4. 22
5. 23
6. 24
7. 25
8. 26
9. 27
10. 32

14 Problemen bij de luchthaven „Wich-Eis-BER tel Willy“

De Kerstman wordt er gek van. Alweer dient de opening van de nieuwe luchthaven Eis-BER „Wichtel Willy“ aan de Noordpool uitgesteld te worden. Hij roept de nieuwe technische leider van de luchthaven, kerstkabouter Anton bij zich en wil weten waarom de opening niet zoals gepland kan plaatsvinden. Kerstkabouter Anton geeft, wetend dat zijn baas wiskunde heeft gestudeerd, de volgende uitleg.

„Ons hoofdprobleem is de belichting bij de start- en landingsbanen. Zoals u weet zijn onze drie start- en landingsbanen in de vorm van een gelijkzijdige driehoek aangelegd. De taxibanen zijn aangelegd met verschillende niveau's van belangrijkheid.

De drie taxibanen van niveau 1 verbinden de middelpunten van twee start-en landingsbanen, waardoor de gelijkzijdige driehoek in vier kleinere, paarsgewijs congruente gelijkzijdige driehoeken wordt verdeeld. De twaalf taxibanen op niveau 2 verdelen deze vier driehoeken op dezelfde wijze in zestien kleinere congruente driehoeken. Dit herhaalt zich tot en met de taxibanen van niveau 2012. Meer taxibanen zijn er niet.

Voor onze spitsvondig ontworpen lichtinstallatie, hebben we precies zo veel lampen nodig als er gelijkzijdige driehoeken te maken zijn met de banen (ongeacht of dat nu delen van start- of landingsbanen of van taxibanen zijn).

De lampen kunnen per stuk geleverd worden, maar ook in pakketten van 10, 100, 1000, enz., dus in machten van 10. Hoe groter het pakket, hoe goedkoper de lampen per stuk zijn, hoewel een pakket van 10 lampen duurder is dan 9 enkele lampen en een pakket van 100 duurder is dan negen 10-pakketten en 9 enkele lampen, enz.

Het planbureau heeft vorig jaar bepaald, hoeveel pakketten van 10, 100,... , en nog enkele lampen gekocht moeten. Per ongeluk heeft kerstkabouter Wowi bij de laatste vergadering van de Raad van Commissarissen koffie over de planning gemorst, waardoor wij niet meer kunnen zien, hoeveel 10-pakketten we moeten kopen. De planologen kunnen we het moeilijk vragen, aangezien we ze in het voorjaar hebben ontslagen. Het duurt zeker nog enkele maanden voordat we uitgevonden hebben hoeveel 10-pakketten we nodig hebben. “

De kerstman besluit om de zaak in eigen hand te nemen. „Zo moeilijk kan het toch niet zijn!. De start en landingsbanen vormen precies één enkele driehoek. Met de belangrijkste taxibanen erbij zijn er dan vijf driehoeken, namelijk de vier kleine driehoeken en de grote driehoek. Wanneer we ook alle belangrijke taxibanen van niveau 2 erbij betrekken, dan zijn er 27 driehoeken, namelijk 16 kleine; 7 driehoeken die elk uit vier kleine driehoeken bestaan, 3 driehoeken die uit negen kleine driehoeken bestaan en tenslotte de grote driehoek. Wacht maar, ik reken het verder even snel uit.“

Help de Kerstman en ontdek hoeveel 10-pakketten gekocht moeten worden.

Mogelijke antwoorden:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6

7. 7
8. 8
9. 9
10. 0

15 Een kikker op een achthoek

Auteur: Michael Zaks

Opgave

De kerstman had de volgende droom: Aan de rand van een vijver ligt een achthoek, waarvan de hoekpunten aansluitend zijn aangegeven met de letters $A, B, \ldots, G, H$. Het hoekpunt met de letter E ligt in het water. Op hoekpunt A zit een kikker. Boven de vijver hangt een klok, die 's middags om 12 uur precies 12 keer slaat. Bij elke slag springt de kikker naar een van de twee nabijgelegen hoekpunten zodanig dat hij bij de 12^e slag voor de eerste keer in hoekpunt E terecht komt om vervolgens met een plons in de vijver te verdwijnen.

Vraag: Hoeveel verschillende wegen ($ABC \ldots E$, $AHA \ldots E$ etc.) kan de kikker daarbij hebben afgelegd.

Mogelijke antwoorden:

1. 37
2. 38
3. 123
4. 124
5. 328
6. 329
7. 1017
8. 1018
9. 1278
10. 3246

16 Brombeer

Auteur: Agnes Cseh

Opgave

De slee is volbeladen, Rudolf staat in de startblokken en de kerstman is klaar om weg te vliegen, maar. . . een verstrooide kabouter is vergeten om het laatste kado in te pakken. Dat kado is een teddybeer, die *brom* zegt als je hem een hand geeft. Dat doet hij echter alleen met twee batterijen. De kabouter merkt op het laatste moment dat de beer geen batterijen heeft, en rent snel de werkplaats in om batterijen te halen. Daar ligt een stapel nieuwe batterijen en een stapel gebruikte batterijen—maar de kabouter weet in zijn haast niet goed meer welke stapel welke is. Voor de zekerheid grijpt hij van elke stapel vier batterijen mee.
Nu op een draf terug naar de brombeer. Daarbij raken ook nog eens de acht batterijen door elkaar. Dus eenmaal aangekomen weet de kabouter alleen dat vier van de acht batterijen nieuw zijn, en vier van de acht gebruikt. De brombeer doet het echter alleen met twee nieuwe batterijen. Dan maar uitproberen: als hij de brombeer openschroeft, twee batterijen erin doet, weer dichtschroeft, en een hand geeft, dan kunnen er twee dingen gebeuren: ofwel de beer zegt *brom* en kan na deze poging met de twee klaarblijkelijk nieuwe batterijen worden ingepakt, ofwel hij zegt niets en minstens één van de batterijen was gebruikt. In dat geval moet de beer weer opengeschroefd, enz.

De tijd dringt en de kerstman wordt ongeduldig, en elke poging met twee batterijen kost tijd. Hoe vaak moet de kabouter hooguit, als hij het slim aanpakt, twee batterijen in de beer doen om ervoor te zorgen dat er uiteindelijk twee nieuwe batterijen in de beer zitten? Het laatste paar batterijen, dat hij erin stopt alvorens de beer in de pakken, telt natuurlijk mee!
Mogelijke antwoorden:

1. 4
2. 5
3. 6
4. 7
5. 8
6. 9
7. 12
8. 15
9. 23
10. 28

17 Kerstkalender

Auteurs: Samuel Drapeau, Martin Karliczek, Michael Kupper

Opgave

De moeder van Mia en Ben heeft dit jaar slechts één adventskalender gekocht. Zij had zich voorgenomen niet te bemoeien met wie de inhoud (chocola) krijgt, maar dit elke dag door een kaartspel te laten beslissen. Om beiden toch minstens één keer chocola te laten eten heeft de moeder besloten dat Mia het eerste deurtje opent en Ben de laatste.
Zij weet dat er een enorme herrie en strijd ontstaat, mocht een van beiden twee dagen achter elkaar chocola krijgen. Dan hoort ze dingen zoals: „Mia mocht gisteren ook al“of „Ben mag alweer snoepen “. Mocht er in twee opeenvolgende dagen steeds een ander winnen, dan blijft het rustig. De moeder weet hoe goed haar kinderen zijn bij het spelen van spelletjes en schat dat beiden ongeveer even vaardig zijn zodat elke dag de kansen voor beiden 50% is. Nu probeert ze uit te vinden hoe groot de kans is dat het twaalf dagen achter elkaar rustig blijft (Het is haar duidelijk dat op de eerste dag Ben gaat protesteren als Mia aan de beurt is). De moeder overweegt zich helemaal op afstand te houden en de keuze ook op dag 1 en dag 24 door het kaartspel te laten bepalen.
Hoe groot is nu de kans dat er twaalf dagen aaneen rust verkeert?

Mogelijke aanpak: De moeder zou als volgt dit probleem kunnen aanpakken. Ze schrijft elke dag op of Ben wel of niet mag snoepen. Mag Ben snoepen dan geeft zij dat aan met het getal 1, zo niet dan noteert zij het getal 0. Bemoeit zij zich er mee, dan is het eerste getal een 0 en het laatste getal een 1. Daar tussenin staan 22 getallen die 0 of 1 kunnen zijn. Volgen twee enen of twee nullen elkaar dan is er strijd. De moeder moet dientengevolge tellen hoe vaak een 1 direct na een 0 volgt of een 1 direct na een 0. Elke dag is de kans op 0 gelijk aan 0.5. Er moet dus uitgerekend worden hoe groot de kans is dat er in een rij van 24 nullen of enen, precies 12 keer een 0 direct naast een 1 staat. Als ze zich er niet mee bemoeit dan staan er op haar blaadje in totaal 24 nullen en enen en ze weet niet wat het eerste getal en het laatste getal kan zijn. Opnieuw telt ze het aantal enen dat direct naast een 0 staat.

Vraag: Hoe groot is de kans dat het precies twaalf dagen rustig blijft (dit betekent dat er precies twaalf keer een 0 naast een 1 staat) in geval de moeder er zich mee bemoeit? We noemen deze kans, de kans p_1. Hoe verandert deze kans in geval de moeder er zich niet mee bemoeit? Die kans geven we aan met p_2.

Mogelijke antwoorden:

1. De kans dat Ben op de eerste dag chocola krijgt is dezelfde als die voor Mia. Daarna is alles even waarschijnlijk. Is het twaalf dagen rustig, dan is er ook twaalf dagen herrie met beide kans $\frac{1}{2}$. Daar verandert niets aan wanneer moeder er zich niet mee bemoeit. Dus $p_1 = 0.5$ en $p_2 = p_1$.

2. Zoals in het vorige antwoord werd beargumenteerd is $p_1 = 0.5$. Ongetwijfeld neemt die kans toe wanneer de moeder er zich niet mee bemoeit. Dus $p_1 = 0.5$ en $p_2 > p_1$.

3. Het is zoals in het leven. Het is nooit zoals men denkt. Daarmee is het antwoord een hele duidelijke 0, of de moeder er zich wel of niet mee bemoeit. Dus $p_1 = 0$ en $p_2 = p_1$.

4. Een schoolvoorbeeld van pedagogiek. Bemoeit de moeder er zich mee dan is de kans 0. Houd zij zich er volledig buiten dan neemt de kans toe. Dus $p_1 = 0$ en $p_2 > p_1$.

5. Bemoeit moeder er zich mee, dan is er precies één mogelijkheid dat er 12 dagen rust heerst. Daarom is de kans $p_1 = (0.5)^{22}$. Bemoeit zij zich er niet mee, dan is er ook maar één mogelijkheid. In dit geval geldt $p_2 = (0.5)^{24}$. Dus $p_1 = (0.5)^{22}$ en $p_2 < p_1$.

6. Er bestaat precies één mogelijkheid dat het bij het bemoeien van de moeder precies 12 dagen rustig blijft. Dus $p_1 = (0.5)^{22}$. Als dag 1 en dag 24 anders kunnen verlopen, zijn er meer mogelijkheden. Dus $p_1 = (0.5)^{22}$ en $p_2 > p_1$.

7. Er bestaat precies één mogelijkheid dat het bij het bemoeien van de moeder precies 12 dagen rustig is. Voor de dagen 1 en 24 zijn er vier combinaties van nullen en enen mogelijk. Derhalve zijn er in het tweede geval vier varianten voor 12 dagen rust en dus is $p_1 = (0.5)^{22}$ en $p_2 = 4 * (0.5)^{24} = p_1$. Conclusie: $p_1 = (0.5)^{22}$ en $p_2 = p_1$.

8. Zonder combinatoriek komt men niet verder. Er zijn 24 dagen en 12 dagen zou het rustig moeten zijn. Daarvoor bestaan $\binom{24}{12} = 2704156$ mogelijkheden. Wordt dit aantal vermenigvuldigd met de enkele waarschijnlijkheid $(0.5)^{22}$ (2^{22} is gelijk aan het totaal aantal rijtjes van nullen

en enen ter lengte van 22) dan geeft dat $p_1 = 0.6448$. Bekijken we nu 24 dagen, dan slinkt die enkele waarschijnlijkheid van $(0.5)^{22}$ naar $(0.5)^{24}$, meer mogelijkheden zijn er desondanks niet. Daarmee is $p_2 = 0.1612$ en derhalve kleiner. Dus $p_1 = 0.6448$ en $p_1 > p_2$.

9. Zoals hiervoor werd beargumenteerd, is $p_1 = 0.6448$. Natuurlijk slinkt de enkele waarschijnlijkheid, en is er ook een viervoud aan mogelijkheden Dus $p_1 = 0.6448$ en $p_1 = p_2$.

10. Deze opgave wordt gesteld om ons bezig te houden en ons iets bij te brengen. Zoals altijd is het laatste antwoord juist. Het kan 23 dagen rustig blijven (de eerste dag niet) maar 12 dagen moet het rustig blijven. Alles is even waarschijnlijk. Daarom nemen we voor p_1 de waarde $\binom{23}{12} =$ 135278 vermenigvuldigd met $(0.5)^{22}$ en dus is $p_1 = 0.3224$. Bemoeit de moeder er zich niet mee, dan kan er 24 dagen rust verkeren en we krijgen: $p_2 = \binom{24}{12} * (0.5)^{24} = 0.1612$. p_1 is dus precies het dubbele van p_2. Conclusie: $p_1 = 0.3224$ en $p_1 > p_2$.

18 De effectieve Kerstman

Auteur: Aljoscha Palinkas
Vertaling: Aart Blokhuis

Opgave

Als kerstversiering voor in de tuin heeft mijn vriend Erwin mij dit jaar een zelf in elkaar geknutselde levensgrote Kerstman cadeau gedaan. Hij is uit alle mogelijke houtsoorten en plastics aan elkaar gelijmd, en van ingewikkelde electronica voorzien. Aan zijn muts en aan zijn mouwen zitten rode lampen die knipperen kunnen. Met zijn linker arm kan hij zwaaien en in zijn rechterhand heeft hij een pijp. Daarenboven kan hij ook nog twee verschillende kerstliedjes zingen, *De herdertjes lagen bij nachte* en *O denneboom*, waarbij hij ook nog door een blaaskapel wordt begeleid. Maar hij kan de twee liedjes niet tegelijk zingen, daar heeft Erwin speciaal voor gezorgd. Hoewel onze buren daarvan, mits in dezelfde toonaard gezongen natuurlijk, zeker erg onder de indruk zouden zijn. Om het schouwspel afwisselend te laten zijn, heeft Erwin deze drie effecten op elkaar afgestemd. Om de twintig minuten wordt er omgeschakeld, wat zoveel betekent dat, afhankelijk van welke effecten in de afgelopen twintig minuten actief waren een bepaald effect ingeschakeld wordt, dan wel blijft, of uitgeschakeld wordt, afhankelijk daarvan of aan bepaalde eisen voldaan is:

Het knipperen begint of gaat door als daarvoor *De herdertjes lagen bij nachte* is gezongen en anders niet. Het zwaaien begint of gaat door als daarvoor geen lied gespeeld werd, maar wel de lampen knipperden, in alle andere gevallen wordt er niet gezwaaid. *O Denneboom* wordt alleen dan gezongen, als ervoor de lampen knipperden. *De herdertjes lagen bij nachte* wordt alleen dan gezongen, als daarvoor de lampen niet knipperden, maar er wel gezwaaid werd. In alle overige gevallen wordt er überhaupt geen lied gezongen.

Men kan in het begin, voor het inschakelen van de stroom, voor elk effect met een schakelaar een toestand instellen. Toen ik het apparaat uitprobeerde was ik enthousiast; er veranderde inderdaad elke twintig minuten wel iets. Maar toen hield het na een tijdje op. Nadat ik met de hand de effecten opnieuw ingesteld had begon het weer. Nu eens hield het na een tijdje op, dan weer ging het de hele tijd door. Toen ik mijn vriend Erwin hierover opbelde zei hij tegen mij dat het van de begintoestand afhing, die ik zelf kon instellen. Maar hoe komt het dan dat het soms helemaal ophoudt vroeg ik hem.

Hij dacht even na, en vroeg me vervolgens of ik misschien ook de pijp wel eens aangezet had. Hoezo, de pijp?!? Inderdaad had ook de pijp een functie, zoals Erwin me uitlegde: de pijp was met een kleine kunstnevelmachine verbonden. Eenmaal aangezet – de schakelaar zat een beetje verstopt aan de linkervoet – kwam er voortdurend rook uit. Ze kon ook alleen maar met de hand weer uitgezet worden. Ze had echter nog een belangrijk gevolg voor de schakeling die de zwaaiende arm controleerde: Als knipperen en zwaaien uitgeschakeld zijn, terwijl het lied *O Denneboom* wordt gezongen en de pijp rookt, dan wordt in de volgende ronde de zwaaiarm actief. Met deze functie ingeschakeld, zo verzekerde Erwin me, zou de Kerstman nooit meer ophouden zijn liedjes te zingen, te zwaaien en te knipperen. Hoewel ik me bij deze woorden wat onbehaaglijk voelde, probeerde ik het toch meteen uit. Ik schakelde de rokende pijp in - en inderdaad, hoe ik het erna ook instelde, en ik heb het vaak geprobeerd, de Kerstman bleef maar doorgaan met zijn voorstelling, elke 20 minuten een ander lied, of soms ook niet en ook het zwaaien en knipperen ging met onderbrekingen steeds maar door ...

Vraag:
Na al dit uitproberen had ik de Kerstman op de eerste advent in de voortuin neergezet. Na drie dagen werd de Kerstman door een steenworp licht beschadigd, vermoedelijk was het mijn jaloerse buurman die met zijn rendier van plastic duidelijk de verliezer was. Maar goed, gelukkig was de beschadiging klein, maar nu gaat het knipperlicht ook dan aan als er daarvoor gezwaaid werd (behalve in het geval dat er, net als vroeger daarvoor *De herdertjes lagen bij nachte* gezongen werd).
Welke van de volgende uitspraken over het mogelijke gedrag van mijn Kerstman, met of zonder rokende pijp, waarbij na het begin de gekozen instelling voor de pijp niet meer veranderd mag worden is correct? Het mooiste vind ik als hij – zonder te zwaaien – *O Denneboom* zingt, en daarbij knippert, dat noem ik bij mezelf *het duet*.

Mogelijke antwoorden:

1. Òf de voorstelling is voorbij voor de aanval met de steen (dus geen lied, geen gezwaai en geen geknipper) òf het duet komt telkens weer voor.
2. Zonder steenworp zou het duet hoe dan ook telkens weer voorkomen, tenminste zolang de voorstelling duurt.
3. Bij een geschikte instelling wordt na de steenworp het duet elk hele uur gespeeld.
4. Als het duet meer dan tweemaal voorkomt, dan kwam het al voor de steenworp meer dan tweemaal voor.
5. Alleen als de pijp rookt, kan *O Denneboom* meer dan driemaal worden gezongen.
6. Als het duet anderhalf uur lang niet is voorgekomen, dan komt het helemaal niet meer, en de pijp is dan uit.
7. Als er bij de begininstelling gezwaaid wordt, dan is de voorstelling na een uur nog steeds bezig.
8. Als het duet voor de steenworp niet is voorgekomen, dan komt het ook daarna niet meer.
9. Als de pijp uit is, dan komt het duet na het werpen van de steen niet meer voor.
10. Als de voorstelling ooit afloopt, maar pas na het werpen van de steen, dus op zijn vroegst na drie dagen, dan komt het duet precies één keer voor.

19 Hyperaanbiedingen in Chocoladekringlopen

Auteurs: Ralf Borndörfer, Olga Heismann

Opgave

Om streng geheime redenen heeft de kerstman op verschillende plaatsen ter wereld een *chocoladekringloop* ingericht. In zo'n kringloop stroomt vloeibare chocolade met constante snelheid door een speciaal buizenstelsel. Het doel is daarbij niet, dat chocolade van de ene plek naar een andere plek vervoerd wordt, maar dat een constante circulatie van chocolade in stand gehouden wordt.

Zo'n buizenstelsel bestaat uit verschillende knooppunten. In elk knooppunt moet per seconde in totaal precies één liter chocolade instromen, en precies één liter chocolade weer uitstromen. In een buizensysteem mogen verschillende, onderling niet samenhangende kringlopen van chocolade plaatsvinden; de kerstman noemt dat dan toch een enkele kringloop (zie bijvoorbeeld de middelste figuur hieronder).

De knooppunten zijn onderling verbonden door buizen. Om constructietechnische redenen kan de chocolade maar in één richting door zo'n buis stromen. Tussen twee knooppunten loopt ofwel *geen* buis, ofwel een buis in *één* van de twee richtingen, ofwel een buis in *elk* van de twee richtingen. Aan iedere buis a hangt een prijskaartje met de prijs, c_a, in euro's die de kerstman moet betalen per liter chocolade die per seconde buis a instroomt (en dan ook per seconde uitstroomt, want de stroomsnelheid is constant). Er mogen natuurlijk halve liters chocolade, of andere fracties van liters, per seconde door een buis stromen, maar de buizen zijn in ieder geval allemaal dik genoeg voor de maximaal nodige belasting van één liter per seconde.

De exploiteur van de buizenstelsels heeft verder een aantal *hyperaanbiedingen*. Daarbij wordt het gebruik van twee buizen a en b met verschillende start- en eindknooppunten goedkoper aangeboden. In plaats van c_a maal de stroom door a plus c_b maal de stroom door b, betaalt de kerstman dan c_{ab} maal het *minimum* van de stromen door a en b, plus c_a maal het restant door a, als door a meer stroomt dan door b, of c_b maal het restant door b, als door b meer stroomt dan door a. Om deze hyperaanbieding aantrekkelijk te maken, geldt natuurlijk dat $c_{a+b} < c_a + c_b$.

Wil de kerstman bijvoorbeeld per seconde 0,2 liter chocolade door a laten lopen en 0,9 liter chocolade door b, dan betaalt hij daarvoor bij gebruik van zo'n hyperaanbieding $0,2 \cdot c_{ab} + 0,7 \cdot c_b$ in plaats van de gewone prijs $0,2 \cdot c_a + 0,9 \cdot c_b$.

Ooit werd ook het idee geopperd om hyperaanbiedingen voor combinaties van *meer* dan twee buizen aan te bieden, maar dat idee werd voorlopig verworpen. Verder is niets bekend over hoe de exploiteur de prijskaartjes per buis en de hyperaanbiedingen vaststelt.

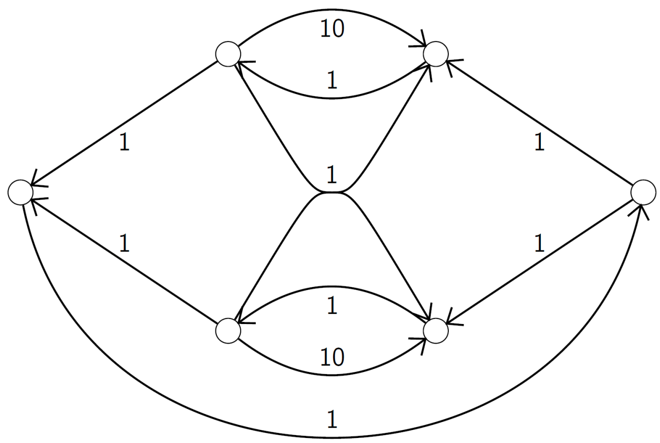
Natuurlijk wil de kerstman zo weinig mogelijk betalen. De daarin gespecialiseerde kabouter Hyperchoc heeft voor de kerstman voor alle in gebruik zijnde buizensystemen optimale, d.w.z. zo goedkoop mogelijke, chocoladekringlopen uitgerekend—al dan niet gebruik makend van hyperaanbiedingen. Daar waar verschillende kringlopen zo goedkoop mogelijk waren, koos Hyperchoc er gewoon één, en gaf alleen die door aan de kerstman.

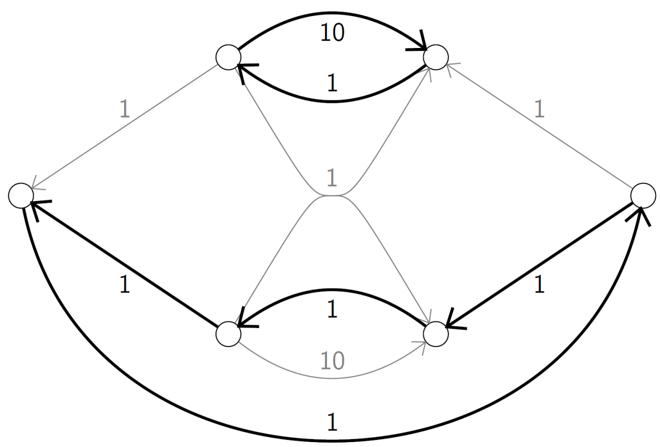
Tot nu toe liep alles prima, maar vandaag ontving de kerstman post van de buizenexploitant: "...mondiale crisis...willen wij vanaf februari 2013 ons buizenbestand zodanig gaan uitdunnen dat uiteindelijk in elk knooppunt slechts precies één buis eindigt en precies één buis begint...u mag aangeven welke buizen behouden blijven... de prijzen en hyperaanbiedingen blijven gelijk...". Met die beperking moet dus door elke buis die behouden blijft precies één liter chocolade gaan stromen. Zulke kringlopen noemen we *geheeltallig*.

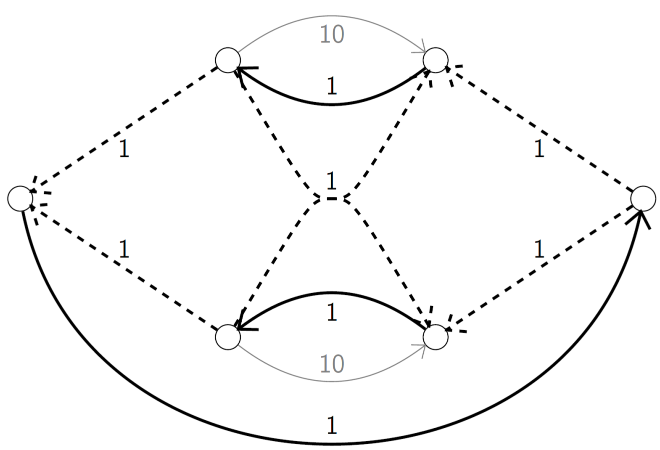
Hyperchoc zou er zijn hand niet voor omdraaien, een optimale keuze te maken uit de buizen, waarbij de exploitatiekosten weer geminimaliseerd worden. Maar helaas is Hyperchoc op vakantie. Toch wil de kerstman alvast een idee, of zijn uitgaven aan de chocoladekringlopen erg zullen gaan stijgen—zo ja, dan moet hij immers alvast wat op kadootjes gaan besparen. Elk buizensysteem apart bestuderen, zou veel te lang duren. Maar misschien is er een algemene uitspraak over alle buizensystemen te doen? Vroeger, toen er nog geen hyperaanbiedingen waren, heeft Hyperchoc de kerstman eens uitgelegd dat er bij elk buizensysteem, en elke optimale chocoladekringloop daarin, een *geheeltallige* chocoladekringloop bestaat met dezelfde, minimale kosten. Maar hoe zit het nu: zullen de kosten van de kerstman gaan stijgen, of hangt dat van de hyperaanbiedingen af?

Hint: zo'n buizensysteem kan men zich voorstellen door cirkeltjes te tekenen voor de knooppunten en pijlen voor de buizen, waarbij de richting van de pijl de stroomrichting van de chocolade aangeeft. Naast elke pijl schrijft men de prijs per liter chocolade per seconde door die buis. Zie de eerste figuur hieronder, die van nut kan zijn bij het vinden van het juiste antwoord. Een hyperaanbieding kan men voorstellen door vertwijgde pijlen, met twee beginpunten en twee eindpunten; daarvan is er hieronder één, met aanbiedingsprijs 1 (de afzonderlijke prijzen voor die twee pijlen zijn niet in de figuur aangegeven).

In de tweede figuur staat een geheeltallige chocoladekringloop (in dikke pijlen) die 15 euro per seconde kost. In de derde figuur staat een niet-geheeltallige kringloop die $5,50$ euro per seconde kost. De dikke, gestippelde pijlen stellen daarin stromen van een halve liter per seconde voor. De halve euro komt van de hyperaanbieding in het midden: voor het gebruik van beide middelste pijlen van links naar rechts betaalt de kerstman $c_{ab} \cdot 0,50 = 0,50$ euro per seconde. Ga na dat in beide chocoladekringlopen in elk knooppunt 1 liter per seconde instroomt en 1 liter per seconde uitstroomt.


10
1
1
1
1
1
1
1
10
1


10
1
1
1
1
1
1
1
10
1


10
1
1
1
1
1
1
1
10
1

Mogelijke antwoorden:

1. De kerstman hoeft beslist niet meer te gaan betalen. Voor elk buizensysteem, al dan niet met hyperaanbiedingen, bestaat er een geheeltallige kringloop die minimale kosten oplevert. Dat zou bovendien ook het geval zijn bij hyperaanbiedingen voor combinaties van meer dan twee buizen.

2. De kerstman hoeft beslist niet meer te gaan betalen. Voor elk buizensysteem, al dan niet met hyperaanbiedingen, bestaat er een geheeltallige kringloop die minimale kosten oplevert. Dat zou echter anders kunnen zijn als er hyperaanbiedingen waren voor combinaties van meer dan twee buizen.

3. De kerstman hoeft beslist niet meer te gaan betalen, want niet geheeltallige kringlopen *kunnen* helemaal niet optimaal zijn, zodat Hyperchoc ook voorheen zulke kringlopen al niet gebruikt kan hebben.

4. Het kan gebeuren, dat de kerstman meer moet gaan betalen. Zijn kosten kunnen echter hooguit verdubbelen, zelfs als er hyperaanbiedingen voor combinaties van meer dan twee buizen zouden zijn.

5. Het kan gebeuren, dat de kerstman meer moet gaan betalen. Zijn kosten kunnen echter hooguit met een factor n vermenigvuldigd worden, als er alleen hyperaanbiedingen voor combinaties van hooguit n buizen zijn.

6. Het antwoord hangt ervan af, hoeveel hyperaanbiedingen er zijn in verhouding tot het aantal knooppunten. Pas wanneer het aantal hyperaanbiedingen een bepaald, positief, geheeltallig veelvoud van het aantal knooppunten overstijgt, zou het voor de kerstman duurder kunnen worden.

7. Bij buizensystemen waarvoor tot nu toe niet van de hyperaanbiedingen gebruikt gemaakt werd—zelfs als die wel bestonden—gaan de kosten niet omhoog. Bij systemen waarvoor wel van hyperaanbiedingen gebruikt gemaakt werd, kunnen de kosten weliswaar stijgen, maar hooguit verdubbelen ten opzichte van de huidige situatie.

8. Bij buizensystemen waarvoor tot nu toe niet van de hyperaanbiedingen gebruikt gemaakt werd—zelfs als die wel bestonden—gaan de kosten niet omhoog. Bij systemen waarvoor wel van hyperaanbiedingen gebruikt gemaakt werd, kunnen de kosten weliswaar stijgen, maar hooguit tot het tienvoudige van de huidige kosten.

9. Bij buizensystemen waarvoor tot nu toe niet van de hyperaanbiedingen gebruikt gemaakt werd—zelfs als die wel bestonden—gaan de kosten niet omhoog. Bij systemen waarvoor wel van hyperaanbiedingen gebruikt gemaakt werd, kunnen de kosten echter willekeurig hoog worden.

10. Helaas kan men hier niets over zeggen, zonder de concrete buizensystemen te bekijken. De kosten van de kerstman kunnen willekeurig hoog worden, zelfs als voor een buizensysteem aanwezige hyperaanbiedingen in de huizige optimale chocoladekringloop van Hyperchoch helemaal niet gebruikt worden.

20 IJzerkabouter Marathon

Auteurs:
Rudi Pendavingh (TU Eindhoven; rudi@win.tue.nl)
Frits Spieksma (KU Leuven; Frits.Spieksma@econ.kuleuven.be)

Opgave

Kabouter Knars heeft vandaag voor de eerste keer meegedaan aan het traditionele IJzerkabouter toernooi (Irongnome 2012), mogelijk het zwaarste sportevenement ter wereld.
Bij het onderdeel 'marathon' deed kabouter Knars 3 uur en 30 minuten over de gehele afstand. Hij moest vele kilometers afleggen, door diepe sneeuw ploeteren, bevroren hellingen beklimmen, gletscherspleten en ijsbruggen oversteken, en soms over spiegelgladde ijsvlakten glibberen. De marathon ging van Kabouterstede naar Vrieshuizen en via dezelfde weg weer terug naar Kabouterstede.
Kabouter Knars heeft de weg van Kabouterstede naar Vrieshuizen in vier deeltrajecten verdeeld. De exacte lengte van deze trajecten is onbekend; we weten alleen dat elk traject ten minste 5 km lang is. Kabouter Knars heeft het k-de traject twee keer afgelegd, en wel één keer op de heenweg van Kabouterstede naar Vrieshuizen, met snelheid a_k, en één keer op de terugweg van Vrieshuizen naar Kabouterstede, met snelheid b_k. Omdat sommige trajecten bergop gingen en andere bergaf, omdat bij Kabouter Knars perioden van zware vermoeidheid zich afwisselden met perioden van hernieuwde energie, en omdat Knars op sommige momenten kracht putte uit zijn heupflacon met rum, verschillen de snelheden a_k en b_k op hetzelfde traject soms sterk.

$a_1 = 18$ km/h	$a_2 = 12$ km/h	$a_3 = 8$ km/h	$a_4 = 15$ km/h
$b_1 = 9$ km/h	$b_2 = 12$ km/h	$b_3 = 24$ km/h	$b_4 = 10$ km/h

De totale afgelegde weg, van Kabouterstede naar Vrieshuizen en weer terug (in kilometers) duiden we hieronder aan met L, en de totale tijd die Kabouter Knars gebruikte om van Kabouterstede naar Vrieshuizen te komen (in uren:minuten:seconden), met T.

Welke van de volgende tien uitspraken is waar?

1. $L = 42{,}195$ (precies als bij de Olympische Spelen) en $T =$ 1:45:00.
2. $L = 42$ en $T =$ 1:43:10.
3. $L = 42$ en T ligt tussen 1:41:20 en 1:45:50; de exacte waarde van T is niet af te leiden uit de gegevens.
4. $L = 42$ en T ligt tussen 1:42:30 en 1:46:40; de exacte waarde van T is niet af te leiden uit de gegevens.
5. $40 \leq L \leq 44$ en $T =$ 1:43:10; de exacte waarde van L is niet af te leiden uit de gegevens.
6. $40 \leq L \leq 44$ en T ligt tussen 1:41:20 en 1:45:50; de exacte waarde van L noch T is uit de gegevens af te leiden.
7. $40 \leq L \leq 44$ en T ligt tussen 1:42:30 en 1:46:40; de exacte waarde van L noch T is uit de gegevens af te leiden.
8. $41 \leq L \leq 45$ en $T =$ 1:43:10; de exacte waarde van L is niet af te leiden uit de gegevens.
9. $41 \leq L \leq 45$ en T ligt tussen 1:41:20 en 1:45:50; de exacte waarde van L noch T is uit de gegevens af te leiden.
10. $41 \leq L \leq 45$ en T ligt tussen 1:42:30 en 1:46:40; de exacte waarde van L noch T is uit de gegevens af te leiden.

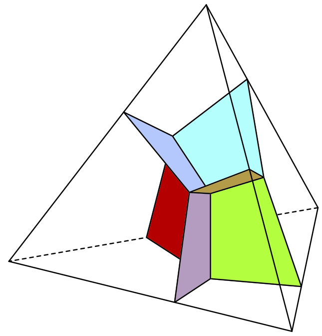
21 Optimale vierendeling van een tetra¨eder

Auteur: Jens A. Griepentrog

Opgave

De Kerstman belt op kerstavond aan bij een familie met vier kinderen, en heeft natuurlijk kadootjes bij zich. Onder andere een reusachtig stuk chocola in de vorm van een regelmatige tetraëder! Om de chocola eerlijk onder de kinderen te verdelen, moeten de ouders die tetraëder in vier even grote stukken snijden. De kinderen wachten trappelend van ongeduld op hun chocola, en dus willen de ouders zo snel mogelijk te werk gaan. Daarbij ontstaat echter discussie over de vraag: *Hoe groot is het kleinst mogelijke snijoppervlak waarmee de tetraëder in vier stukken van hetzelfde volume verdeeld wordt?*

Vader en moeder denken hier een hele tijd over na. De kinderen beginnen te jengelen en worden de kamer uitgestuurd, opdat vader en moeder in alle rust het antwoord kunnen zoeken—maar tevergeefs. De Kerstman kan het niet meer aanzien, en haalt een afbeelding tevoorschijn waarop het kleinst mogelijke snijoppervlak ingekleurd is:



“Ik verklap het antwoord niet helemaal, maar ik zal jullie een hint geven: er is in het inwendige van de tetraëder een punt dat tot de rand van allevier de stukken behoort. Trek vanuit dat punt de loodlijnen op twee aan elkaar grenzende zijvlakken van de tetraëder, en trek vanuit de snijpunten van die loodlijnen met die zijvlakken weer de loodlijnen naar de gemeenschappelijke ribbe van de twee zijvlakken. Het vlakke stukje met als rand de vier gevonden lijnstukken is onderdeel van het (ingekleurde) minimale snijoppervlak, en je krijgt het hele snijoppervlak door deze constructie voor elk tweetal zijvlakken te herhalen.”

Hoe groot is nu de minimale oppervlakte A van een snijoppervlak waarmee een regelmatige tetraëder met ribbe ter lengte 1 in vier stukken met hetzelfde volume kan worden gesneden?

Mogelijke antwoorden:

1. $A = 1$
2. $A = \frac{3}{4}\sqrt{2}$
3. $A = \sqrt{3}$
4. $A = \sqrt{2}$
5. $A = \frac{1}{3}$
6. $A = \frac{1}{4}\sqrt{2}$
7. $A = \frac{1}{4}$

8. $A = \frac{1}{6}\sqrt{3}$
9. $A = \frac{1}{6}\sqrt{6}$
10. $A = \frac{1}{2}$

22 Wie was de boosdoener?

Auteur: Marika Karbstein
Vertaling: Aart Blokhuis
Project: B15

Opgave

De Kerstman is boos. In het restaurant zou een lekkere slagroomtaart voor hem klaarstaan. Hij had er zich al de hele dag op verheugd om die in zijn middagpauze op te eten. Maar wat een teleurstelling, toen hij aankwam zaten er wel negen kerstelfjes in het restaurant, maar van een slagroomtaart geen spoor. De elfjes, normaal gesproken zeer spraakzaam, keken wat beteuterd voor zich. Niemand die ergens iets van wist of die iets had gezien. De Kerstman keek ze één voor één aandachtig aan en dacht na. Veel kon je voor hem niet verborgen houden. Zo had het bezoek van de Paashaas vorig jaar hem niet echt verrast. Voor dit jaar hadden de elfjes een theatervoorstelling gepland. Die had ook een verrassing moeten zijn, maar op de een of andere manier was de Kerstman er toch achter gekomen dat er iets voorbereid werd. Het was hem niet ontgaan dat alle elfen de hele dag met hun voorbereidingen voor het theaterstuk bezig waren. Dat hield in: tekst instuderen, voorspreken, schminken, decors bouwen en kostuums passen. Elke van deze activiteiten vindt plaats in een ander huis. Tussen elk paar huizen is een verbinding die voor een rit met de slee te gebruiken is. Zo'n verbinding gaat ofwel bergop, ofwel bergaf. Gaat het de ene kant bergop, dan natuurlijk in de andere richting bergaf. Op deze dag had elk van de negen elfjes drie van de vijf activiteiten bezocht. Allemaal hebben ze de wegen ertussen met de slee afgelegd. Na de laatste bezigheid zijn ze allemaal met hun slee naar het restaurant gereden, ook deze paden gaan hetzij bergop hetzij bergaf, afhankelijk in welke richting je gaat. Verder weet de Kerstman nog het volgende:

- Alle negen elfjes zijn even vaak bergop gegaan. (Inclusief de rit naar het restaurant.)
- Idrin en Tol zijn als enigen na hun laatste bezigheid bergaf naar het restaurant gerodeld.
- Idrin begon met kostuums passen, en ging toen decors bouwen.
- Kostuums passen en decors bouwen waren de tweede en derde bezigheid van Sharna en Rorrina.
- Zarna begon met decors bouwen, ging daarna kostuums passen, en tenslotte naar het instuderen.
- Miira begon met kostuums passen. Haar tweede activiteit was schminken.
- Tinder en Sharna begonnen met tekst instuderen. Allebei hadden dezelfde tweede bezigheid.
- Erden en Rorrina begonnen met schminken. Vervolgens ging Erden met zijn slee naar beneden om decors te bouwen.
- De enige, die met voorspreken begon was Nor.
- Van het voorspreken gaat het in alle richtingen bergaf.

Het volgende is gegeven: Alle elfen zijn tegelijkertijd met hun eerste bezigheid begonnen. Gaat het na de eerste bezigheid bergop, dan heeft elke elf 10 minuten, gaat het bergaf, dan heeft iedereen 5 minuten nodig om naar de volgende plek te sleeën. Voor de daaropvolgende verbindingen geldt: Bergaf heeft elke elf 2 minuten minder nodig als voor de vorige verbinding, maar bergop twee keer zo lang als voor de laatst gebruikte verbinding. Elke elf heeft voor elke bezigheid op elke locatie dezelfde tijd nodig.

Wie heeft onder deze aannamen als eerste het restaurant bereikt, en had dus de beste mogelijkheid om ongemerkt de slagroomtaart op te eten?

Mogelijke antwoorden:

1. Zarna
2. Idrin
3. Miira
4. Tinder
5. Sharna
6. Tol
7. Erden
8. Rorrina
9. Nor
10. Er zijn onvoldoende gegevens een van elfen met zekerheid aan te wijzen.

23 Elfendemocratie

Auteur: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven; gwoegi@win.tue.nl)

Vertaling: Aart Blokhuis

Opgave

De 15 elfen Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo, Frodo, Gumbo, Harpo, Izzo, Jacco, Kuffo, Loco, Mirko, Nemmo en Onno willen 100 koekjes onder elkaar verdelen. Daarbij ontstaan al meteen problemen: Om te beginnen mogen (vanwege de kruimels) de koekjes niet gebroken worden. Vervolgens is 100 niet deelbaar door 15. En tenslotte hebben ze ruzie.
Uiteindelijk worden de elfen het eens over een door en door democratische procedure. De alfabetisch laatste elf van de groep wordt benoemd tot opdelingsleider (niet te verwarren met afdelingsleider), en doet een voorstel voor het opdelen van de 100 koekjes onder de deelnemende elfen, hemzelf inbegrepen. Vervolgens wordt er over zijn voorstel gestemd.

- In het geval dat er één of helemaal geen tegenstem is, dan is het voorstel aangenomen, de koekjes worden volgens het voorstel verdeeld en de stemming is voorbij.
- Als er echter twee of meer tegenstemmen zijn, dan wordt de opdelingsleider afgezet, en zwaar bestraft voor zijn slechte voorstel. Hij verliest alle rechten op de koekjes, mag bij de volgende stemronden niet meedoen en moet in plaats van dit alles een verschrikkelijk zure groene appel eten. Vervolgens wordt de procedure herhaald, met een nieuwe opdelingsleider, en een elf minder.

De elfen nemen hun democratie zeer ernstig; er wordt ten alle tijde eerlijk gestemd, en er zijn geen afspraken of geheime overeenkomsten, en al helemaal geen samenzweringen. De doeleinden van de 15 elfen bij het stemmen zijn eenvoudig samen te vatten: Belangrijkste doel van elke elf is het om niet in een zure appel te hoeven bijten. Bijna even belangrijk is het om zoveel mogelijk koekjes te bemachtigen. Tenslotte vinden ze het buitengewoon lollig om iemand anders in de zure appel te zien bijten. Als een elf dus moet kiezen tussen twee situaties die hem hetzelfde aantal koekjes opleveren, en waarbij hij geen zure appel hoeft te eten, dan neemt hij de oplossing waarbij er meer zure groene appels gegeten worden (door andere elfen natuurlijk).

De buitengewoon slimme en bedachtzame Onno wordt als laatste elf in het alfabet tot eerste opdelingsleider benoemd. Hij denkt lang na, en komt dan met het voor hem best mogelijke opdelingsvoorstel.
Welke van de volgende uitspraken is van toepassing op Onno's opdelingsvoorstel?
Mogelijke antwoorden:

1. Onno krijgt 2 koekjes en de ander elfen elk 7.
2. Onno krijgt 3 koekjes en Izzo krijgt er 8.
3. Onno krijgt 4 koekjes en Espo krijgt er 11.
4. Onno krijgt 5 koekjes en Loco krijgt er 8.
5. Onno krijgt 6 koekjes en Dondo krijgt er 8.
6. Onno krijgt 7 koekjes en Kuffo krijgt er ook 7.
7. Onno krijgt 8 koekjes en Frodo krijgt er 3.
8. Onno krijgt 9 koekjes en Atto krijgt er 13.
9. Onno krijgt 10 koekjes en Harpo krijgt er 8.
10. Onno krijgt geen koekjes en moet hoe dan ook in de zure appel bijten.

24 Mondriaan

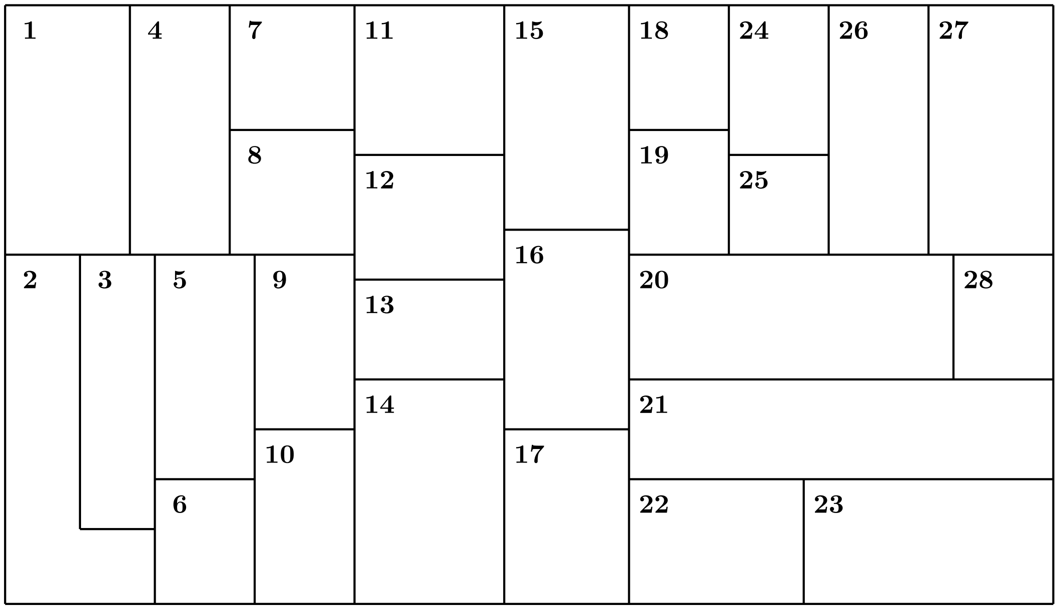
Auteurs:
Hajo Broersma (Universiteit Twente; H.J.Broersma@utwente.nl)
Cor Hurkens (TU Eindhoven; c.a.j.hurkens@tue.nl)

Opgave

De Nederlandse kunstschilder Piet Mondriaan heeft een kerstkaart ontworpen die in 28 rechthoekige gebieden is onderverdeeld. Hij wil elk van deze gebieden met één van de zes beschikbare kleuren rood, geel, blauw, wit, zwart en violet opvullen, zodanig dat gebieden die aan elkaar grenzen verschillende kleuren krijgen. Een kleuring met r rode, g gele, b blauwe, w witte, z zwarte en v violette gebieden heeft een zogenoemde Mondriaanwaarde

$$(r-9)^2 + 2\,(g-9)^2 + 3\,(b-8)^2 + 2w + 3z + 4v.$$

Mondriaan heeft een voorkeur voor ingekleurde Kerstkaarten met een zo laag mogelijke Mondriaanwaarde.



Wat is de laagst mogelijke Mondriaanwaarde van de getoonde Kerstkaart?
Mogelijke antwoorden:

1. 2
2. 3
3. 4
4. 5
5. 6
6. 7
7. 8
8. 9
9. 10
10. 11