Case bij Math D1 voor WB:
Gewichtsvermindering in een vakwerk

Belangrijk:

Schrijf de uitwerkingen van alle opdrachten op het verslagformulier! Om vlot door de opdrachten 1 t/m 7 te komen zijn de resultaten van veel berekeningen reeds gegeven op het verslagformulier. Zorg ervoor dat je na ongeveer 1 1/2 uur bij opdracht 8 bent aangekomen. Lukt dit niet, begin dan toch met opdracht 8 (gebruik daar het in het verslagformulier gegeven resultaat uit opdracht 7) en maak de opdrachten 1 t/m 7 verder af als je met opdracht 14 klaar bent.

1 Inleiding

In deze case keren we terug naar het statische vakwerk dat we in de case van Math C1 hebben doorgerekend (zie figuur 1). We hebben gezien dat de krachten in de vier staven niet allemaal even groot waren, en ten gevolge daarvan hoeven de staven niet allen even zwaar te worden uitgevoerd.

In deze case gaan we dan ook

- een uitdrukking opstellen voor de totale massa die in het vakwerk gaat zitten,
- de massa berekenen van het vakwerk en van enkele varianten daarvan,
- het vakwerk (binnen zekere voorwaarden) minimaliseren naar de benodigde massa.

2 Het vakwerk uit de case van Math C1

In figuur 1 tonen we nog eens het oorspronkelijke vakwerk en de evenwichten in de knooppunten waarmee de evenwichtsvergelijkingen kunnen worden opgesteld. Merk op dat de positie van de vier knooppunten hier vast ligt.

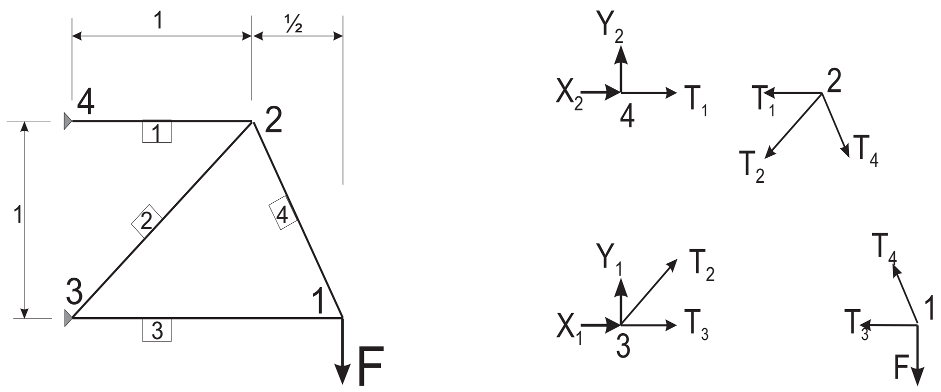

Figure 1: Het vakwerk bij de case van Math C1 en het evenwicht per knooppunt

3 Het nieuwe vakwerk

In deze case gaan we de zaak in een wat breder perspectief plaatsen. We gaan een vakwerk construeren dat aan de volgende eisen voldoet:

1. Het vakwerk wordt aan een muur bevestigd in twee punten die (verticaal) één meter uit elkaar liggen,
2. Het vakwerk moet een last F dragen op anderhalve meter uit de gevel,
3. De totale massa van het vakwerk moet minimaal zijn.

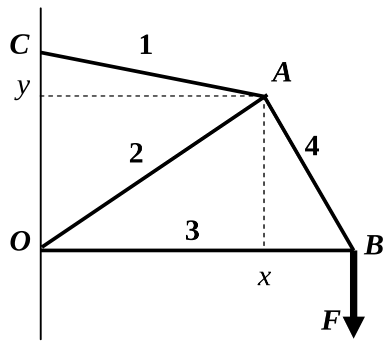

Figure 2: Het nieuwe vakwerk

Zie figuur 2: in vergelijking met het vakwerk uit figuur 1 blijven drie van de vier knoopunten gefixeerd: knooppunt O heeft coördinaten $(0, 0)$, knooppunt B heeft coördinaten $(\frac{3}{2}, 0)$ en knooppunt C heeft coördinaten $(0, 1)$. Het knooppunt A rechtsboven in het vakwerk ligt vooralsnog niet vast: de coördinaten van dit knooppunt zijn (x, y).

Opdracht 1: Druk de lengten L_1 t/m L_4 van de vier staven uit in x en y.

Opdracht 2: Bepaal de vergelijkingen van horizontaal resp. verticaal krachtevenwicht in de punten A en B (de evenwichtsvergelijkingen in de andere knooppunten hebben we niet nodig). Geef met T_i de kracht in staaf i weer. Laat in deze vergelijkingen de lengten staan als L_i (het invullen van de waarden van L_i uit opdracht 1 gebeurt later).

Opdracht 3: Schrijf het stelsel vergelijkingen uit opdracht 2 in de vorm van een matrixvergelijking $M\,\mathbf{T} = \mathbf{b}$.

Met behulp van de technieken uit Math C1 kan dit stelsel lineaire vergelijkingen eenvoudig worden opgelost. Er blijkt precies één oplossing te zijn. Deze is gegeven op het verslagformulier (dit hoef je niet zelf na te rekenen).

Let op: In het vervolg zullen we alleen situaties bekijken waarbij punt A op of boven de (denkbeeldige) lijn tussen de punten B en C ligt (de tekening in figuur 2 is een voorbeeld van zo'n situatie). Bovendien nemen we aan dat x en y voldoen aan: $0 < x \leq \frac{3}{2}$ en $0 < y \leq 1$.

Opdracht 4: Bepaal met inachtneming van het bovenstaande of de krachten T_1 t/m T_4 in de vier staven positief of negatief zijn; geef bij de kracht T_2 een duidelijke toelichting in de vorm van een berekening (Hint bij T_2: Stel eerst een vergelijking op van de lijn door B en C en leid hieruit een ongelijkheid af in x en y voor punten (x, y) die boven deze lijn liggen. Gebruik deze ongelijkheid om het teken van T_2 te bepalen).
Wat is de interpretatie van de negatieve krachten? Wat verandert er als het punt A onder de lijn BC ligt? Komt dit overeen met je verwachting?

4 Kracht en sterkte

We poneren nu de aanname dat de trekkracht T_i die staaf i kan hebben evenredig is met de oppervlakte A_i van zijn doorsnede. Deze trekkracht, gedeeld door de oppervlakte van de doorsnede, is een spanning die we aangeven met σ_i, en de constructie zal bezwijken als ergens deze spanning boven de kritische spanning σ komt.
Bovenstaande gaat over trekkracht. We nemen voor het gemak aan dat voor drukkracht hetzelfde geldt, dus de spanning (quotiënt van drukkracht en oppervlakte van de doorsnede) mag niet groter zijn dan diezelfde kritische spanning.
Na berekening van de kritische doorsneden (de doorsneden die bij de berekende staafkrachten de kritische spanning geven) zal een ontwerper ze allemaal nog een veiligheidsfactor 2 of 3 geven. Ofwel, men neemt in dit verhaal de kritische spanning twee- of driemaal zo klein.

Opdracht 5: Toon aan dat de kritische massa W van het vakwerk (de massa waarbij op alle staven precies de kritische spanning σ staat) wordt gegeven door:

$$W = \frac{\rho}{\sigma}\left(L_1|T_1| + L_2|T_2| + L_3|T_3| + L_4|T_4|\right),$$

waarbij ρ de dichtheid van het materiaal voorstelt. Geef een duidelijke verklaring van de absolute-waarde tekens!

<u>Let op</u>: De factor $\frac{\rho}{\sigma}$ is niet interessant: hij blijft in alle berekeningen meelopen, en daarom laten we hem voortaan weg. Dus:

$$W = L_1|T_1| + L_2|T_2| + L_3|T_3| + L_4|T_4|.$$

Opdracht 6: In opdracht 4 heb je bepaald welke krachten positief en welke negatief zijn. Gebruik dit om bovenstaande vergelijking te herschrijven *zonder* absolute-waarde-tekens.
Bedenk hierbij dat $|a| = \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0 \\ -a & \text{als } a < 0. \end{cases}$

5 Functie van twee variabelen

Opdracht 7: Vul nu in de uitdrukking uit opdracht 6 de gegeven staafkrachten T_i in, alsmede waarden van L_i uit opdracht 1; neem hierbij gemakshalve $F = 1$.
De massa van het vakwerk is nu uitgedrukt als een functie van de variabelen x en y. Laat zien dat de gevonden uitdrukking gelijk is aan de functie $W(x, y)$ in het verslagformulier.

Opdracht 8: Bereken de massa van het vakwerk uit figuur 1, dus met punt $A = (1, 1)$. En ook in de gevallen waarbij $A = (\frac{3}{4}, 1)$ en $A = (\frac{3}{2}, 1)$.

6 Minimale massa

In het verslagformulier (pagina 4) is een contourplot van de functie $W(x, y)$ gegeven. In de volgende opdrachten gaan we deze bekijken.

Opdracht 9: In de contourplot zijn twee kritieke punten te onderscheiden. Geef (bij benadering) de x- en y-coördinaten van deze punten. Licht tevens toe hoe je uit de contourplot afleidt wat de aard van deze punten is (locaal minimum/locaal maximum/zadelpunt).

Opdracht 10: Geef m.b.v. de contourplot een schatting van de minimale massa van het vakwerk en de bijbehorende coördinaten van het punt A.
In de contourplot is in de buurt van het punt $(x, y) = (0.03, 0.8)$ de waarde van W kleiner dan 2. Waarom mag uit de contourplot niet geconcludeerd worden dat het mogelijk is om een vakwerk met massa kleiner dan 2 te maken dat aan alle eisen voldoet?

Uit deel 1 van Math D1 weten we dat de kritieke punten van een functie kunnen worden berekend door de gradiënt van de functie gelijk te stellen aan de nulvector. Hiervoor moeten de partiële afgeleiden van de functie dus worden bepaald.

Opdracht 11: Bepaal de partiële afgeleiden van $W(x, y)$. Je mag dit handmatig doen, of door gebruik te maken van de opgedane kennis bij Modelleren en Programmeren.

Opdracht 12: Met een computerprogramma als Matlab zijn de kritieke punten in dit voorbeeld relatief eenvoudig te berekenen. Er blijken vier kritieke punten te zijn (zie verslagformulier). Vul de ontbrekende coördinaten in door gebruik te maken van de opgedane kennis bij Modelleren en Programmeren.
In welk kritiek punt wordt het gezochte minimum aangenomen? (gebruik de contourplot) Bereken de minimale massa van het vakwerk.

7 Gradiëntmethode

Er bestaat nog een andere methode, de zogenaamde gradiëntmethode, om het minimum te benaderen.

Opdracht 13: - Wat weet je van de richtingsafgeleide van $W(x, y)$ in een punt (x, y) als de richting gelijk is aan de gradiëntvector van W in dat punt, aangeduid met $\nabla W(x, y)$?
- Wat is het verband tussen de gradiëntvector van W in een punt (x, y) en de niveaukromme van W door dat punt?
- In welke richting, gezien vanuit een punt (x, y), daalt de grafiek van W het sterkst?

Opdracht 14: Bereken vanuit het punt $(x, y) = (1, 1)$ de richting waarin de grafiek van W het sterkst daalt (zie opdracht 13). Teken deze richting *met potlood* in de contourplot: een pijl met de staart in punt $(1, 1)$ met de juist richting. Hoe ver (tot welk punt) kan deze richting worden gevolgd tot de grafiek van W weer gaat stijgen? (lees dit zo nauwkeurig mogelijk af uit de contourplot)
Bereken vanuit dit punt opnieuw de richting van de sterkste daling en teken ook deze richting als pijl in de contourplot. Hoe ver (tot welk punt) kan deze richting worden gevolgd tot de grafiek weer gaat stijgen?
Bereken de massa van het vakwerk bij deze laatste positie van punt A. Vergelijk het resultaat met de waarde die je in opdracht 12 hebt gevonden.

Belangrijk:

Alle formulieren moeten aan het eind weer ingeleverd worden!