



Privacy op het internet

Auteur: Christian Hercher (Friedrich-Schiller-Universität Jena)

Vertaling: Aart Blokhuis

Opgave:

Rudolph is verontwaardigd! Op het sociale netwerk Reindeerbook heeft iemand grapjes gemaakt over zijn rode neus. Zoiets doe je toch niet! Maar ja, iedereen verbergt zich daar achter een of andere schuilnaam. Dan is het goedkoop pesten ... En ook al is men eigenlijk verplicht, zich met een echte naam aan te melden, in werkelijkheid kan dat natuurlijk lastig gecontroleerd worden.

Het enige wat hij weet, is dat een gebruiker met de naam Aphrodite zich heeft laten verleiden tot de kwetsende commentaren op zijn neus. Maar, wie verbergt zich daarachter?

Maar Rudolph is natuurlijk niet dom. Hij kan precies zien, wie daar met wie praat en is niet weinig verbaasd. Bij elkaar negen personen, die hij uit zijn werkelijke omgeving kent, communiceren daar met elkaar. En ze hebben voor zichzelf hoogdravende namen bedacht. Daar gaan de gesprekken tussen Hermes, Zeus, Aphrodite, Hera, Poseidon, Demeter, Athene, Artemis en Ares. Wat denken ze eigenlijk, dat ze op de Olympus zijn?

Maar Rudolph vindt nog meer uit. Hij kan namelijk ook zien wie er daar met wie bevriend is:



Hermes met Zeus, Poseidon en Artemis,
Zeus met Hermes, Athene, Hera, Demeter, Aphrodite en Artemis,
Athene met Zeus, Poseidon en Demeter,
Hera met Zeus en Ares,
Poseidon met Hermes, Athene en Ares,
Demeter met Zeus en Athene,
Aphrodite met Zeus en Artemis,
Artemis met Hermes, Zeus en Aphrodite en tenslotte
Ares met Hera en Poseidon.

(Ok, een paar oudgriekse sagen moeten misschien een beetje herschreven worden...)

„Ha, nu heb ik jullie!“, zegt Rudolph bij zichzelf. Want hij kent zijn Pappenheimers goed genoeg en weet, dat

Anna met Inka, Jordan en Pieter,
Quinten met Norbert en Inka,

Pieter met Inka,
Geronimo met Oliver,
Norbert met Jordan,
Hieronymo met Geronimo,
Oliver met Jordan en Inka en tenslotte
Inka met Hieronymo en Geronimo
bevriend is; en in alle gevallen natuurlijk ook omgekeerd.
Behalve de vriendschappen hierboven zijn er in het werkelijke leven geen verdere vriendschappelijke betrekkingen tussen deze Rendieren.

Daarnaast heeft Rudolph ook nog vastgesteld, dat men zich wat het geslacht betreft, niet kan verlaten op het profiel in Reindeerbook, noch op wat gesuggereerd wordt door de goddelijke gebruikersnaam.

Als we aannemen, dat het op het netwerk om precies dezelfde vriendschappen gaat, als in de werkelijkheid, welk Rendier heeft dan Rudolph beschreven als overdreven verlegen: („Hij krijgt altijd onmiddellijk een rode neus, en begint te stotteren, zodra hij een Rendierdame ziet“)?

Mogelijke antwoorden:

1. Pieter
2. Jordan
3. Inka
4. Oliver
5. Anna
6. Geronimo
7. Norbert
8. Quinten
9. Hieronymo
10. Er zijn meerdere mogelijkheden.



Staking van de geschenkinpakkers

Auteur: Stephan Schwartz

Opgave

Tijdens een ijskoude morgen aan de Noordpool zou het inpakken van geschenken in de Wichteleenheid G op volle toeren moeten draaien. Zou ... Echter, de kerstkabouters hebben het werk neergelegd omdat hun voorwerker, Oberwichtel Ottokar spijbelt. Ottokar heeft besloten die vredige ochtend in het Yslabyrint door te brengen (zie onderstaande afbeelding). De Kerstman is alles behalve enthousiast als hij van de werkstaking hoort. Hij moet zorgen dat Ottokar weer zo snel mogelijk aan het werk gaat, anders dreigen de geschenken onverpakt te worden uitgeleverd.



De Kerstman weet dat Ottokar het hem niet gemakkelijk zal maken, omdat hij constant rondzwerft in het labirint. Om van het ene station (een knooppunt in de afbeelding) naar het andere station te gaan, heeft hij precies één minuut nodig. Steeds wanneer Ottokar bij een station aankomt kiest hij willekeurig (met onderling gelijke kansen), een vervolgpad uit en loopt verder. Het kan voorkomen dat hij dan weer in hetzelfde pad loopt, als het pad waaruit hij net is gekomen.

De kerstman kijkt nog eenmaal op de bewakingsmonitor van het labirint. Precies daar op station 10, bevindt zich Ottokar nu. Zonder te aarzelen gaat de kerstman aan de slag en bedenkt “Op mijn leeftijd ga ik me voor deze schurk niet haasten. Ik zoek een mooi station uit en ga daar wachten tot hij komt”. De kerstman heeft twee minuten nodig om een willekeurig station te “beamen”. In die twee minuten gaat Ottokar natuurlijk verder in het labirint. Maar, welk station zou de Kerstman moeten “beamen” om Ottokar zo vroeg mogelijk te treffen. Preciezer gezegd: Welke uitspraak over de mogelijke locatie van de kerstman is juist, wanneer het erom gaat de tijd dat ook Ottokar op die plaats komt, te minimaliseren

Aanwijzing: Er mag verondersteld worden dat de optimale positie van de Kerstman eenduidig is. Bovendien kan men van het gegeven dat er slechts één antwoord mogelijk is, nuttig gebruik maken.

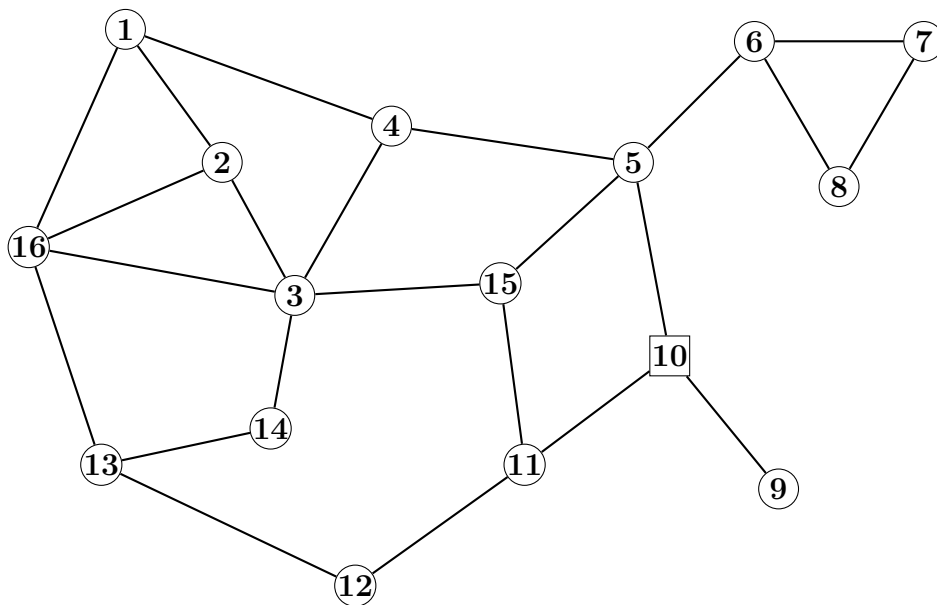


Abbildung 1: Plattegrond van het Yslabyrinth

Mogelijke antwoorden:

1. Positie 11 is beter dan Positie 15.
2. Positie 5 is optimaal.
3. Positie 7 is beter dan Positie 8.
4. Positie 10 is optimaal.
5. Posities 6 en 4 zijn even goed.
6. Positie 4 is de slechtste.
7. Positie 15 is beter dan Positie 5.
8. Positie 11 is optimaal.
9. Positie 5 is slechter dan Positie 10.
10. Positie 15 is optimaal.



Lichter dan lucht

Auteurs:

Antje Bjelde (TU Berlin), Felix Fischer (TU Berlin), Max Klimm (TU Berlin)

Opgave

BANG! De rendieren Karli en Winny zijn bij het schaatsen op het bevroren meer op elkaar geknald en moeten enige dagen het bed houden. Uitgerekend zo kort voor de Kerst! De Kerstman roept een crisisberaad met de andere rendieren bijeen. “Wat moeten we nu toch doen?”, jammert Jona, “De slede met geschenken is te zwaar voor ons, wanneer die twee niet mee kunnen trekken.”. “Ik heb een idee!”, roept de Kerstman na enige minuten van prakkezeren. “We hadden toch nog ...”, en hij is al op weg naar de opslagkamer. Na een tijdje rommelen komt hij terug met een paar grote dozen. “Kijk hier, dit is de oplossing: luchtballonnen! We kunnen die met helium opblazen, dat draagt dan een deel van het gewicht van de geschenken. We hebben ze in verschillende groottes.” Inderdaad staat op elke doos vermeld hoeveel ballonnen van welk volume er in de doos zitten. Maar, helaas: de etiketten op de ballonnen zelf, die het volume nauwkeurig vermelden, hebben losgelaten.



Natuurlijk willen de Kerstman en zijn rendieren zoveel mogelijk helium in de ballonnen hebben, zodat ze zoveel mogelijk geschenken kunnen vervoeren. Wanneer ze echter de ballonnen te hard opblazen, dan knappen ze. Om nu een strategie te ontwikkelen, beginnen ze met een doos met daarin twee ballonnen, waarop, aan de buitenkant van de doos, de volumes $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{8}$ zijn aangegeven. “We kunnen ze allebei tot $\frac{1}{8}$ opblazen!”, luidt het voorstel van Friis, “dan knapt geen van de ballonnen!”. “Ja, maar dan hebben we slechts een totaalvolume van $\frac{1}{4}$ ”, redeneert Jascha, “we kunnen ook eerst proberen één ballon tot $\frac{1}{4}$ op te blazen. Als dat lukt, wat met kans $\frac{1}{2}$ het geval is, dan weten we dat dit de ballon met volume $\frac{1}{4}$ is, en kunnen we de andere tot $\frac{1}{8}$ opblazen, en hebben we een totaalvolume van $\frac{3}{8}$ bereikt. Als we pech hebben en de eerste ballon knapt, dan moet dat de ballon van volume $\frac{1}{8}$ zijn geweest en kunnen we de tweede alsnog tot $\frac{1}{4}$ opblazen, met als eindresultaat een totaalvolume van $\frac{1}{4}$. Omdat beide situaties met gelijke kans optreden, verwachten we met deze strategie een volume van $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$ te behalen”.

De andere rendieren zijn onder de indruk en overdenken nu hoe ze ballonnen optimaal kunnen opblazen. Daartoe leggen ze eerst enkele begrippen vast:

strategie: een aanpak, waarbij voor elke mogelijke situatie nauwkeurig is vastgelegd, welke ballon in de volgende stap hoever wordt opgeblazen, of dat men klaar is met opblazen. Wat Jascha doet is een strategie beschrijven.

verwachte opbrengst: het volume, dat je bij een gegeven strategie gemiddeld denkt te behalen. De strategie van Jascha levert een verwachte opbrengst van $\frac{5}{16}$.

optimale strategie: een strategie waarvoor de verwachte opbrengst minstens zo groot is als voor een willekeurige andere strategie voor dezelfde doos met ballonnen. Jascha's strategie voor de doos met opschrift $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}$ is in feite optimaal.

eindtoestand: een toestand waarin de ballonnen verkeren, waarbij men besluit geen van de ballonnen verder op te blazen; alleen van de niet geknapte ballonnen wordt het actueel bereikte volume aangegeven. De eindtoestanden behorende bij de strategie van Jascha zijn $\{\frac{1}{4}\}$ en $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$; beide eindtoestanden treden met kans $\frac{1}{2}$ op.

optimale eindtoestand: een eindtoestand waarbij elke verdere actie van het opblazen van een ballon de verwachte opbrengst niet kan verhogen. Stel dat we 2 ballonnen hebben, met daadwerkelijke volumes 2 en 3, dan is een toestand $\{2, 2\}$, dus met een totaalvolume van 4, een optimale eindtoestand. We zouden kunnen proberen een van de twee ballonnen nog ietsje op te blazen. Lukt dat, dan kunnen doorgaan tot de ballon een volume van 3 heeft, en bereiken we een totaalvolume van 5. Maar voor hetzelfde geld knapt de ballon en blijven we met een totaalvolume van 3 achter. Gemiddeld genomen eindigen we op 4, wat geen verbetering is. Ook eindtoestanden $\{2, 3\}$ en $\{3\}$ zijn optimaal.

standaarddoos ter grootte k : een doos met k ballonnen met groottes $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}\}$.

Welke van de volgende uitspraken is **niet waar**?

Mogelijke antwoorden:

1. Er bestaat een strategie voor standaarddozen, waarbij geen enkele ballon knapt en waarbij de verwachte opbrengst 1 is.
2. Elke optimale strategie voor standaarddozen heeft een verwachte opbrengst van minstens 1.
3. Voor een standaarddoos van grootte 3 bestaat er een strategie waarvoor $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ een mogelijke, optimale eindtoestand is.
4. Voor een standaarddoos van grootte 3 bestaat er een strategie waarvoor $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$ een mogelijke, optimale eindtoestand is.
5. Elke optimale strategie voor een standaarddoos ter grootte 2 heeft in elke optimale eindtoestand de ballon met volume 1 volledig opgeblazen.
6. Er bestaat geen strategie voor standaarddozen ter grootte 2, met een verwachte opbrengst groter dan $\frac{5}{4}$.
7. Er bestaat een strategie voor standaarddozen van grootte 3 met een verwachte opbrengst, die echt groter is dan de grootst mogelijke verwachte opbrengst voor standaarddozen van grootte 2.
8. Een standaarddoos van grootte 2, waarbij het etiket op de ballon met volume $\frac{1}{2}$ nog vastzit, heeft een hogere optimale verwachte opbrengst dan een doos met vermelde volumes $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$.
9. Voor een standaarddoos van grootte 4, waarbij reeds één ballon is opgeblazen tot volume 1, er één ballon is geknapt bij opblazen tot volume $\frac{1}{2}$, en twee ballonnen zijn opgeblazen tot volume $\frac{1}{4}$ heeft men een optimale eindtoestand bereikt.
10. Voor een standaarddoos van grootte 4, waarbij reeds één ballon is opgeblazen tot volume 1, er één ballon is geknapt bij opblazen tot volume $\frac{1}{3}$, en twee ballonnen zijn opgeblazen tot volume $\frac{1}{4}$ heeft men nog geen optimale eindtoestand bereikt.



Waar blijft de lift? Auteur:

Rudi Pendavingh (TU Eindhoven)

De Opgave:

“Alweer die Grinch”, moppert de kerstman. Hij wil namelijk in zijn nieuwe hoofdkantoor zeven liften laten inbouwen, en de Grinch heeft de opdracht aangenomen. Hoe heeft dat nou weer kunnen gebeuren? In de kleine lettertjes van het contract is de voorwaarde opgenomen dat elke lift op hoogstens zes etages zal stoppen.



“Maar *zes* etages!”, moppert de kerstman. Nou ja, dan had hij het contract maar beter moeten lezen.

“Het valt eigenlijk wel mee”, troost Plato de plan-elf hem. “Door goed te plannen op welke zes etages elke lift stopt kunnen we ervoor zorgen dat men toch direct van elke etage naar elke andere kan komen met de lift, zonder overstappen”. “Als het gebouw maar één etage meer had gehad, was dat niet mogelijk geweest.”

“Zonder overstappen!”, roept de kerstman opgelucht.

Maar nu willen wij weten: hoeveel etages heeft het nieuwe hoofdkantoor?

Mogelijke antwoorden:

1. 11 etages
2. 12 etages
3. 13 etages
4. 14 etages
5. 15 etages
6. 16 etages
7. 17 etages
8. 18 etages
9. 19 etages
10. 20 etages



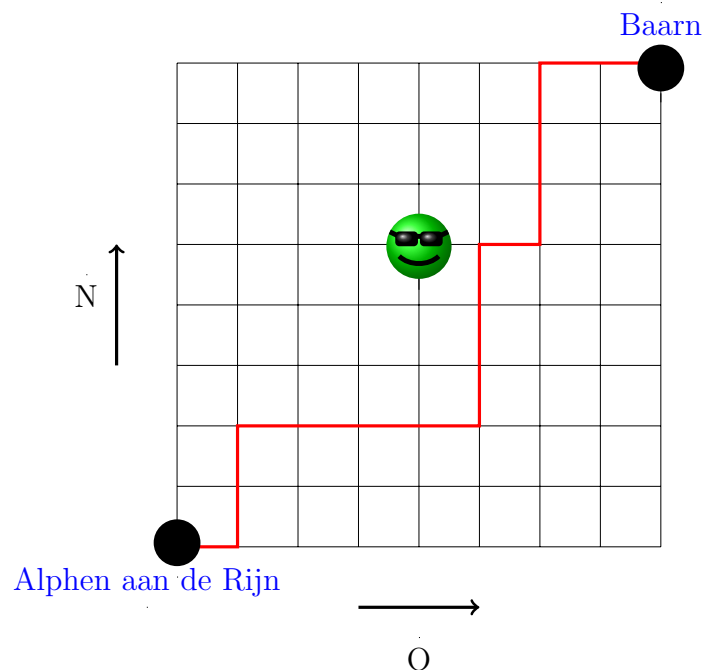
De kerstman en de Grinch

Autor: Wilhelm Stannat (TU Berlin)

Opgave:

Zelfs de kerstman gaat met de tijd mee en heeft zijn oude rendierslee vervangen door een moderne elektrische slee. Helaas is deze technologie nog enigszins onbetrouwbaar: De besturing is defect. Daarom kan de kerstman op weg van Alphen aan de Rijn naar Baarn alleen naar het noorden of het oosten rijden.

Onderweg schuilt de boze Grinch om de pakjes van de wagen te stelen. Een mogelijke route van de kerstman ziet er als volgt uit:



De vraag is nu hoe groot de verhouding p is van alle manieren waarop de kerstman op de Grinch stuit ten opzicht van alle manieren waarop de kerst-

man vanuit Alphen aan de Rijn Baarn kan bereiken met zijn elektrische slee?

Het aantal mogelijke paden in bovenstaande afbeelding is begrensd. Santa kan slechts over de roosterlijnen in de afbeelding bewegen. Dit betekent dat gezien vanuit Alphen aan de Rijn hooguit 8 kilometer naar het noorden en hooguit 8 kilometer naar het oosten zijn toegestaan. Bovendien zijn alleen veranderingen van de richting na een geheel aantal kilometers geoorloofd. De Grinch is gelokaliseerd op 4 kilometer naar het oosten en 5 kilometer naar het noorden vanuit Alphen aan de Rijn. Hij blijft daar.



Mogelijke antwoorden:

1. $0 \leq p < 0.1$
2. $0.1 \leq p < 0.2$
3. $0.2 \leq p < 0.3$
4. $0.3 \leq p < 0.4$
5. $0.4 \leq p < 0.5$
6. $0.5 \leq p < 0.6$
7. $0.6 \leq p < 0.7$
8. $0.7 \leq p < 0.8$
9. $0.8 \leq p < 0.9$
10. $0.9 \leq p < 1$

Opmerking

Dit soort combinatorische problemen ontstaan vaak op natuurlijke wijze bij het onderzoek naar discrete stochastische processen op roosters. Van belang hierbij is het asymptotische gedrag van een verhouding zoals beschreven in het voorbeeld voor grote vierkanten.



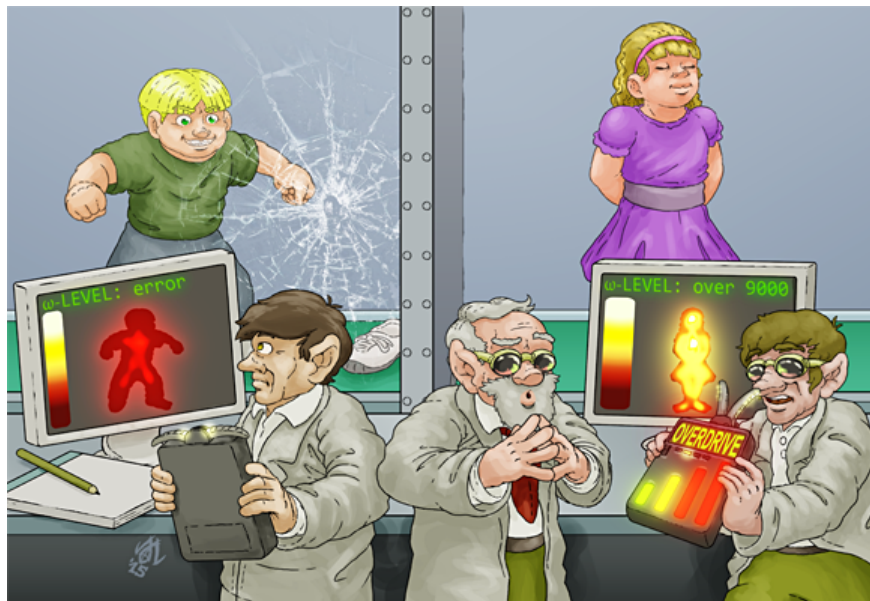
De ω -straling

Auteurs: Raman Sanyal (FU Berlin), Moritz Schmitt (FU Berlin)

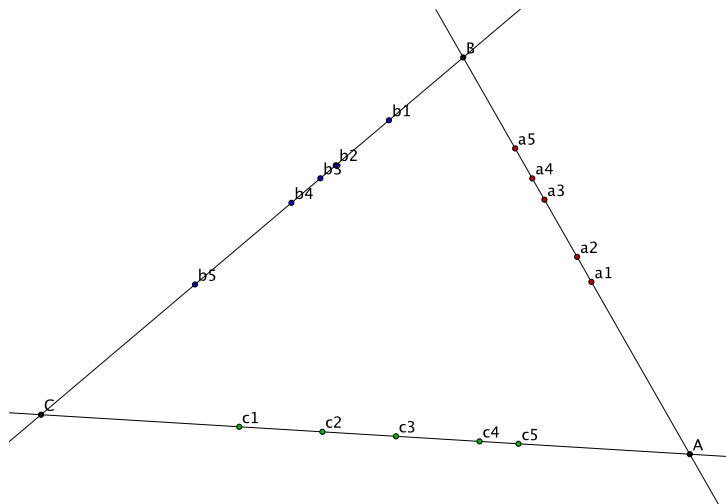
Vertaling: Aart Blokhuis

De Opgave:

Zoals bekend stralen lieve kindertjes. En in de opwindende dagen voor kerst wordt deze straling – met een wetenschappelijke term, de ω -straling genoemd – extra krachtig. De kabouterknechten van de Kerstman hebben al lang geleden ontdekt, dat men deze ω -straling gebruiken kan, om de huizen van de lieve kindertjes te vinden. Ze hebben een geraffineerd systeem ontworpen, om dit totaal eenvoudig te doen.



Op een plattegrond van de stad wordt om elke wijk een keurige driehoek getekend, waarvan de hoekpunten A , B en C heten. Dan wordt er naar elke wijk een speciale wijkkabouter gestuurd, die er, over de zijden van de driehoek één keer omheen loopt, te beginnen bij A , en dan via B naar C en weer terug naar A . Hoe dichtër de kabouter in de buurt komt van een lief kind, des te krachtiger wordt de ω -straling. Terwijl de kabouter over de zijden van de driehoek loopt, stijgt en daalt de door hem gemeten straling. Telkens wanneer de straling op zijn krachtigst is (dus een lokaal maximum bereikt), markeert de kabouter de precieze positie op de zijde, dat wil zeggen, hij noteert de afstand tot het hoekpunt van de driehoek waar hij het laatst geweest is. Wanneer hij weer bij zijn uitgangspunt, A is aangekomen, dan heeft hij op elke zijde evenveel merkpunten. Nu is het zaak om uit deze merkpunten de positie van de huizen van de lieve kindertjes éénduidig te reconstitueren. Dat is vrijwel altijd mogelijk! We gebruiken hierbij een ontdekking van Dr. Haas, de leider van het K.W.O., het Kabouter-Wetenschappelijk-Onderzoekscentrum, namelijk dat de straling omgekeerd evenredig is met de afstand, en dat elk lief kind even krachtig straalt. Natuurlijk heeft het gedrag van een lief kind geen effect op het gedrag van andere kindertjes, zelfs niet die bestraling interfereren.



In de wijk Nasingen bijvoorbeeld, wonen 5 lieve kindertjes. De corresponderende driehoek heeft de hoekpunten

$$A = (1198.14, 439.29), B = (850, 1050) \text{ en } C = (200, 500).$$

Op de zijde AB meet hij de krachtigste ω -straling bij de afstanden

$$a_1 = 304.95, a_2 = 349.39, a_3 = 450.64, a_4 = 488.07 \text{ en } a_5 = 541.39$$

Voor zijden BC en CA zijn de corresponderende afstanden

$$b_1 = 149.74, b_2 = 257, b_3 = 288.07, b_4 = 346.46 \text{ en } b_5 = 541.03$$

en

$$c_1 = 305.81, c_2 = 433.99, c_3 = 547.51, c_4 = 676.38 \text{ en } c_5 = 736.47$$

Op welke posities wonen de vijf kindertjes?

Mogelijke antwoorden:

1. $(729.05, 795.06), (883.47, 778.63), (855.21, 645.97), (940.58, 545.08), (805.35, 566.4)$
2. $(650, 750), (761.23, 708.94), (513.1, 610.58), (729.05, 795.06), (855.21, 645.97)$
3. $(761.23, 708.94), (884.41, 611.46), (883.47, 778.63), (940.58, 545.08), (805.35, 566.4)$
4. $(513.1, 610.58), (729.05, 795.06), (855.21, 645.97), (940.58, 545.08), (805.35, 566.4)$
5. $(650, 750), (761.23, 708.94), (884.41, 611.46), (950, 700), (513.1, 610.58)$
6. $(650, 750), (884.41, 611.46), (513.1, 610.58), (940.58, 545.08), (805.35, 566.4)$
7. $(761.23, 708.94), (729.05, 795.06), (883.47, 778.63), (510.38, 565.95), (805.35, 566.4)$
8. $(650, 750), (884.41, 611.46), (950, 700), (513.1, 610.58), (729.05, 795.06)$
9. $(761.23, 708.94), (950, 700), (643.42, 641.79), (510.38, 565.95), (729.05, 795.06)$
10. $(761.23, 708.94), (884.41, 611.46), (950, 700), (643.42, 641.79), (510.38, 565.95)$



Mutsen en getallen

Auteurs:

Aart Blokhuis (TU Eindhoven), Gerhard Woeginger (TU Eindhoven)



Opgave

Op een dag in december treft de kerstman de briljante breinkabouters, Arno, Benno, Carlo en Duco en zegt: “Allerbeste breinkabouters! Zoals jullie weten is er een lange en mooie traditie van moeilijke breinbrekers over kabouters met mutsen in de wiskundige adventskalender. Ik wil jullie daarom voor morgen graag uitnodigen voor een gezellige middag met koffie en gebak.” — “Mooi, we komen graag!”, antwoorden Arno, Benno, Carlo en Duco onmiddellijk.

Prachtig, gaat de kerstman verder: “Vanavond borduur ik op vier kaboutermutsen vier verschillende gehele getallen. Morgenmiddag zet ik dan bij elk van jullie, bliksemsnel en van achteren, een van deze mutsen op, en wel zo, dat geen van jullie het getal op zijn eigen muts zien kan. Jullie kunnen natuurlijk wel de getallen zien op de andere drie mutsen, maar mogen hier onderling op geen enkele manier iets over laten merken. Daarna krijgen jullie een blinddoek voor, en dan moet ieder van jullie of zijn rechter of zijn linkerhand opsteken. Jullie kunnen het spel alleen winnen, als twee van jullie de linkerhand, en twee de rechterhand opsteken.”

“Ha!”, interrumpeert Arno de kerstman. “Dat is te makkelijk: Benno en ik steken onze rechterhand, en Carlo en Duco hun linkerhand op, en we hebben gewonnen.” De kerstman verzucht: “Val me niet meteen in de rede Arno, ik was nog niet klaar: Bovendien moeten de kabouters met het kleinste en het op twee na kleinste getal op hun muts, ofwel allebei de rechterhand, ofwel allebei de linkerhand opsteken. Alleen dan hebben jullie gewonnen. Mooi, nu ben ik uitgepraat. Zijn er nog vragen?”

Benno zegt: “Er zijn vier mutsen en we zijn met zijn vieren, dus er zijn vierentwintig mogelijkheden, om ons de vier mutsen op te zetten. Zijn die allemaal even waarschijnlijk?” — “Ja”, antwoordt de kerstman. “Alle vierentwintig mogelijkheden zijn precies even waarschijnlijk.” Dan vraagt Carlo: “Als ik bijvoorbeeld op de andere mutsen de getallen 25, 376 en 1024 zie, moet ik dan mijn linker of mijn rechterhand opsteken? En wat moet ik doen bij de getallen 377, 801 en 15222?” — “Tsja, dat moeten jullie onder elkaar maar uitmaken.”, is het antwoord van de kerstman.

En dat doen de kabouters dan ook. Ze beraadslagen en denken na. Ze denken na en beraadslagen. Dan beraadslagen ze nog meer, en denken nog langer na. Maar uiteindelijk werken ze een waarlijk briljante strategie uit (het zijn tenslotte niet voor niets de breinkabouters), die hun winstkans (onder *alle*

mogelijke strategieën) optimaliseert. Onze vraag: Hoe groot is hun winstkans bij deze werkelijk geniale strategie?

1. De winstkans is $8/24$.
2. De winstkans is $12/24$.
3. De winstkans is $15/24$.
4. De winstkans is $16/24$.
5. De winstkans is $18/24$.
6. De winstkans is $20/24$.
7. De winstkans is $21/24$.
8. De winstkans is $22/24$.
9. De winstkans is $23/24$.
10. De winstkans is $24/24$.

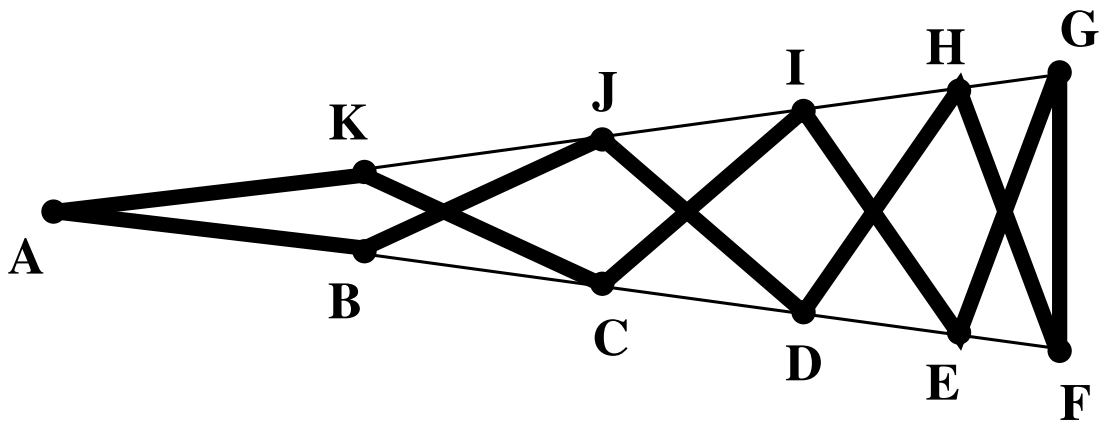


Tiefschnee

Auteur: Georg Prokert (TU Eindhoven)

Knecht Ruprecht stapt door een driehoekig sneeuwveld, dat gelegen is tussen twee steile berghellingen. Hij begint in hoekpunt A en loopt 100 meter langs de rand van het veld naar punt B . Dan gaat hij lijnrecht 100 meter verder dwars door het veld naar punt J aan de andere kant van het veld. Dan weer 100 meter dwars door het veld naar punt D , dan verder 100 meter dwars naar H en nog een keer dwars door het veld naar het hoekpunt F van het veld.

Daarna gaat Ruprecht 100 meter verder naar hoekpunt G en vervolgens vier keer 100 meter dwars door het veld naar de punten E , I , C en K . Tenslotte legt hij nog eens 100 meter langs de rand van het veld terug naar het startpunt A . De afbeelding toont het driehoekige veld met zijn hoekpunten A , F en G . Hierin is het pad van Ruprecht in dikke lijnen getekent. Elk recht stuk is precies 100 lang. (Let op: de schets is niet op schaal getekend)



In deze opgave zijn de hoeken in graden gemeten; een rechte hoek is daarmee een hoek van 90 graden. Een “volle” hoek is een hoek van 360 graden. De

grootte van de hoek $\angle KAB$ bij hoekpunt A wordt aangegeven met x .



Vraag: Wat is de eerste decimaal na de komma in de voorstelling van x als decimaal getal?

Mogelijke antwoorden:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 6
7. 7
8. 8
9. 9
10. 0



Watervat

Auteur: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven)

Opgave:

In het rendierverblijf staat een groot cilindervormig watervat. Het vat is 120 cm hoog en zijn grondvlak heeft een diameter van 80 cm. Het vat is van metaal en weegt (zonder inhoud) precies 22 kg; dit gewicht is volledig gelijkmatig over het oppervlak van het vat verdeeld. De materiaaldikte van de cylinderwand, de deksel en het grondvlak is verwaarloosbaar klein. Het water in het vat heeft een dichtheid van 1 g/cm^3 .

Rendier Rudolph drinkt water uit het volle vat totdat het zwaartepunt van het vat (met daarin het overgebleven water) zo dicht mogelijk bij het aardoppervlak ligt.



Vraag: Hoe hoog staat dan het water in het vat?

Mogelijke antwoorden:

1. Hoogstens 3 cm
2. Tussen 3 en 6 cm
3. Tussen 6 en 9 cm
4. Tussen 9 en 12 cm
5. Tussen 12 en 15 cm
6. Tussen 15 en 18 cm
7. Tussen 18 en 21 cm
8. Tussen 21 en 24 cm
9. Tussen 24 en 27 cm
10. Minstens 27 cm



Reusachtige machten

Auteur: Tom Verhoeff (TU Eindhoven)

Opgave

In het grote pakjeswarenhuis heerst een ware drukte. Er zijn daar zowaar tien miljard pakjes. Om te zorgen dat de elfjes het overzicht niet verliezen, zijn de pakjes genummerd met gehele getallen van 1 tot en met 10 000 000 000. De getallen op de pakjes worden dus steeds langer.

Sommige getallen kun je als macht veel korter opschrijven. De elfjes vragen zich af bij hoeveel getallen dat mogelijk is, alvorens ze het laatste pakje bereiken. Een getal kan als *echte* macht geschreven worden, wanneer er minstens een manier is om het als macht te schrijven waarbij zowel het grondtal als de exponent natuurlijke getallen strict groter dan 1 zijn.



Het elfje Rudi legt dit uit aan de hand van het getal 125: Een mogelijke schrijfwijze van het getal 125 als macht is $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Hierin is 5 het grondtal en 3 de exponent. Beide zijn gehele getallen strict groter dan 1. Dus 125 is een echte macht. Dat er nog meer schrijfwijzen zijn met andere grondtallen en exponenten is niet van belang. Het gaat er om dat er minstens een schrijfwijze als echte macht is. De elfjes oefenen het bepalen van echte machten met de gehele getallen die strict kleiner zijn dan 10. Ze komen er achter dat alleen de getallen 4, 8 en 9 te schrijven zijn als echte machten:

$$\begin{aligned} 1 &= 1^1 \\ 2 &= 2^1 \\ 3 &= 3^1 \\ 4 &= 4^1 = 2^2 \\ 5 &= 5^1 \\ 6 &= 6^1 \\ 7 &= 7^1 \\ 8 &= 8^1 = 2^3 \\ 9 &= 9^1 = 3^2 \end{aligned}$$

Uit luiheid willen ze op de pakjes waar mogelijk het nummer als echte macht schrijven.

Hoeveel getallen die strict kleiner dan 10 miljard (10^{10}) zijn, kunnen als echte macht geschreven worden?

Mogelijke antwoorden:

1. 102218
2. 102219
3. 102229
4. 102230
5. 102292
6. 102294
7. 102368
8. 102371
9. 102716
10. 102719



Som en product Auteurs:

Cor Hurkens (TU Eindhoven) Gerhard

Woeginger (TU Eindhoven)

Opgave

De Kerstman zegt tegen de beide slim-kukels Prodo en Summo: “Ik heb twee getallen x en y met $1 \leq x \leq y$ verzonnen. Daarna heb ik op een kaart de som $S = x + y$ opgeschreven, en op een andere kaart heb ik het product $P = xy$ genoteerd. Ik heb Prodo de kaart met het product gegeven, en Summo heeft de kaart met de som gekregen. Jullie mogen nu jullie kaart bekijken!”



Prodo en Summo staren een tijdje naar hun kaart en denken diep na.
Dan zegt Summo tegen Prodo: “Jij kunt de som S niet met honderd procent zekerheid noemen.”

Prodo antwoordt met: “Aha, dank voor deze aanwijzing. Nou weet ik dat S gelijk moet zijn aan 46.”

En daarop antwoordt Summo weer met: “Aha, ook dank voor deze aanwijzing. Nu ken ik x en y !”

Welke van de volgende tien beweringen is correct?

Mogelijke antwoorden:

1. $23 \leq y < 25$
2. $25 \leq y < 27$
3. $27 \leq y < 29$
4. $29 \leq y < 31$
5. $31 \leq y < 34$
6. $34 \leq y < 37$
7. $37 \leq y < 40$
8. $40 \leq y < 43$
9. $43 \leq y < 46$
10. Beide slim-kukels moeten zich vergissen: uit hun gesprek kunnen zij onmogelijk de waarden van x en y opmaken.

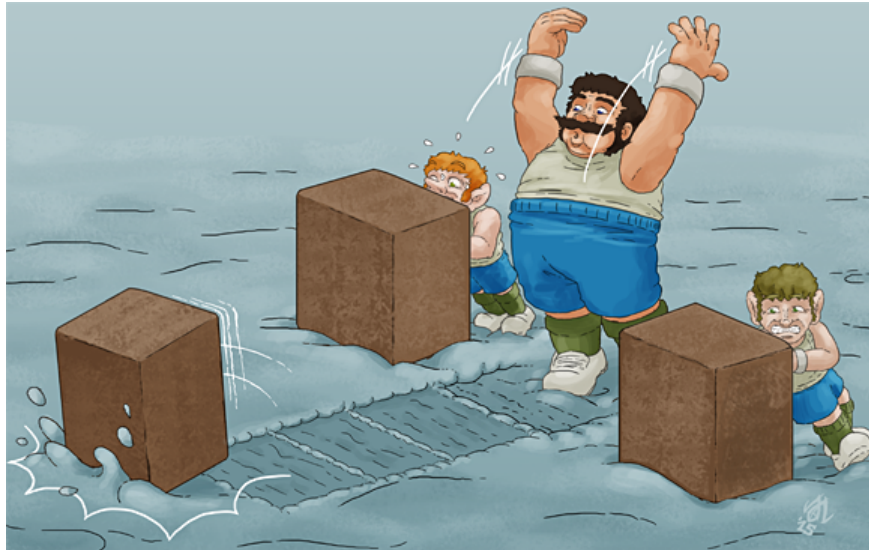


Granietblok

Auteurs: Rudi Pendavingh (TU Eindhoven)

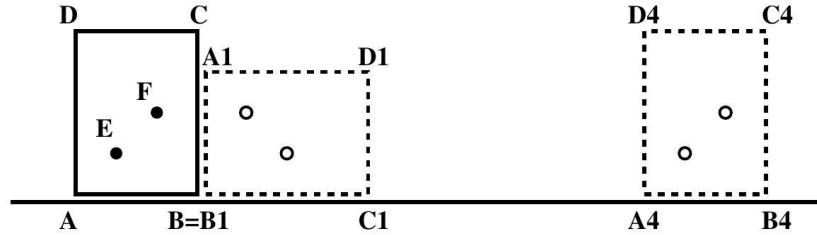
Frits Spieksma (KU Leuven)

Opgave



Het hoogtepunt van het afgelopen sportjaar was natuurlijk weer de traditionele wedstrijd IronGnome 2015—misschien wel de zwaarste sportwedstrijd ter wereld. In het zesde onderdeel moest Knecht Ruprecht een geweldig rechthoekig blok graniet over een afstand van 14 kaboutermeter verplaatsen. Het blok was 4 kaboutermeter hoog, en zijn grondvlak mat 3 bij 3 kaboutermeter. Ruprecht kantelde het blok eerst over een ribbe in de richting van de finish. Daarna kantelde hij het nog een keer, zodat het blok ondersteboven stond. Tenslotte kantelde hij het nog een derde en een vierde keer, zodat het blok uiteindelijk weer in zijn oorspronkelijke positie stond—maar dan 14 kaboutermeter verderop.

De volgende figuur toont de beginpositie van het blok, d.w.z. de zijkant met hoekpunten $ABCD$, de corresponderende posities A_1, B_1, C_1, D_1 na de eerste keer kantelen, en de eindposities A_4, B_4, C_4, D_4 na de laatste keer kantelen.



Op de zijkant van het granietblok stonden twee kleine zwarte vlekken: de eerste vlek E op een hoogte van 1 kaboutermeter van de grond en 1 kaboutermeter van de linkerrand, en de tweede vlek F op 2 kaboutermeter van de grond en 2 meter van de linkerrand. Die twee vlekken zijn in de figuur met kleine cirkels aangeduid. Door het vier keer kantelen beschreef elk van de zes punten A, B, C, D, E, F een bepaalde kromme. We noemen de lengtes van deze krommen (in kaboutermeters) a, b, c, d, e, f . Hoe verhouden deze lengtes zich ten opzichte van elkaar?

Mogelijke antwoorden:

1. Omdat het blok uiteindelijk weer overeind staat, zijn alle zes de lengtes aan elkaar gelijk.
2. Hoe verder een punt van de grond verwijderd is, des te langer is de afstand die hij aflegt. Er geldt $c = d > f > e > a = b$.
3. Hoe verder een punt van de grond verwijderd is, des te korter is de afstand die hij aflegt. Er geldt $c = d < f < e < a = b$.
4. De vier hoekpunten leggen even lange afstanden af, en er geldt $a = b = c = d > e > f$.
5. De vier hoekpunten leggen even lange afstanden af, en er geldt $a = b = c = d > f > e$.
6. De vier hoekpunten leggen even lange afstanden af, en er geldt $a = b = c = d > e = f$.
7. Omdat E precies midden tussen A en F ligt, geldt $e = \frac{1}{2}(a + f)$.
8. De beide hoekpunten aan de linkerkant leggen de langste afstand af. Er geldt $a = d > e > f > b = c$.
9. De beide hoekpunten aan de rechterkant leggen de langste afstand af. Er geldt $b = c > f > e > a = d$.
10. Alle zes de afstanden zijn verschillend.



Kerststemming

Auteur: Heide Hoppmann (Zuse Institut Berlin),
Marika Karbstein (Zuse Institut Berlin)
Project: „Infrastructure design and passenger behaviour in public transport“

Opgave

„Ik kan echt niets anders verzinnen. Het moet aan ons kerstgebak liggen.“, zegt de kerstman. Hij was naar de chef van de Kerstbakkerij, Theo Heerlijk, gesneld om met hem over het gebrek aan kerststemming in Kerstland te praten. Die geeft berouwvol toe „Hmm, ja, er was bij ons inderdaad een klein ongelukje. Ons jongsten Hans en Ole zien onze bakkerij graag als hun ruimteschip 'flitsende raaf'. We hebben slecht een ogenblik even niet opgelet en ze hadden al op een paar knoppen gedrukt. We dachten dat we alles weer op de oude instellingen hadden teruggezet maar blijktbaar is dat niet zo. Helaas ontbreekt in sommige koekjes de kerststemming.“



De kerstman weet dat in elk koekje minstens een van de ingrediënten dennensuiker, sneeuwmeel en kerstkruiden zit. Een eetlepel van elk van de drie ingrediënten heeft een vaste stemmingsfactor. Neemt men twee eetlepels van een ingrediënt verdubbelt de stemmingsfactor, bij drie eetlepels van een ingrediënt verdrievoudigd de stemmingsfactor, enz. Bij het mengen tellen de stemmingsfactoren op. Bereikt de stemmingsfactor een bepaalde kerstwaarde dan treed er een kerststemming op. De kerststemming blijft ook als de kerstwaarde overschreden wordt, echter verdwijnt onmiddellijk als van één van de ingrediënten (maakt niet uit welke) teveel gebruikt wordt. Teveel betekent dat als men een eetlepel minder had gepakt (en de hoeveelheid eetlepels van de andere twee ingrediënten gelijk blijven) de kerstwaarde ook gehaald of overschreden zou worden. Met andere woorden, als een menging voor Kerststemming zorgt dan zou de kerstwaarde niet bereikt worden als men van een van de drie ingrediënten een eetlepel minder had gepakt.

In de bakkerij staan 13 bakautomaten. Elke automaat bakt een bepaalde koekjessoort en mengt daarvoor de drie ingrediënten in een bepaalde verhouding.

„Wat zijn de stemmingsfactoren van dennensuiker, sneeuwmeel en kerstkruiden?“, vraagt de kerstman. Theo Heerlijk antwoordt verlegen: „Dat ben ik vergeten. Maar het zijn allemaal positieve, gehele getallen bestaande uit één cijfer.“ „Hmm. en de kerstwaarde—“, vraagt de kerstman. „Dat weet ik ook niet meer.“, antwoordt Theo Heerlijk treurig. „Ik weet alleen nog dat 5 eetlepels dennensuiker, 1 eetlepel sneeuwmeel en 3 eetlepels kerstkruiden precies de kerstwaarde opleveren. Bovendien overschrijden 1 eetlepel dennensuiker, 2 eetlepels sneeuwmeel en 4 eetlepels kerstkruiden de kerstwaarde met 1 maar zorgen wel voor kerststemming. Voor kerststemming zorgen ook 3 eetlepels dennensuiker, 1 eetlepel sneeuwmeel en 4 eetlepels kerstkruiden; daarbij wordt de kerstwaarde met 2 overschreden. De bakautomaten 11 tot 13 met deze mengverhoudingen zijn dus correct ingesteld.

„Misschien kunnen we een koekjesproeverij organiseren om uit te vinden welke bakautomaten verkeerd ingesteld zijn...“, stelt Theo Heerlijk voor. De kerstman kijkt naar de instellingen van de bakautomaten en bromt „Hmm, zouden we kunnen proberen. Maar ik heb een idee en geloof dat maar een bakautomaat verkeerd is ingesteld.“

De kerstman heeft gelijk. Welke bakautomaat met de volgende instellingen is verkeerd ingesteld?

Mogelijke antwoorden:

1. 2 eetlepels dennensuiker, 3 eetlepels sneeuwmeel en 3 eetlepels kerstkruiden
2. 4 eetlepels dennensuiker, 2 eetlepels sneeuwmeel en 3 eetlepels kerstkruiden
3. 3 eetlepels dennensuiker, 4 eetlepels sneeuwmeel en 2 eetlepels kerstkruiden
4. 5 eetlepels dennensuiker, 3 eetlepels sneeuwmeel en 2 eetlepels kerstkruiden
5. 6 eetlepels dennensuiker, 2 eetlepels sneeuwmeel en 2 eetlepels kerstkruiden
6. 8 eetlepels dennensuiker, 1 eetlepel sneeuwmeel en 2 eetlepels kerstkruiden
7. 6 eetlepels dennensuiker, 4 eetlepels sneeuwmeel en 1 eetlepel kerstkruiden
8. 8 eetlepels dennensuiker, 3 eetlepels sneeuwmeel en 1 eetlepel kerstkruiden
9. 9 eetlepels dennensuiker, 2 eetlepels sneeuwmeel en 1 eetlepel kerstkruiden
10. 11 eetlepels dennensuiker, 1 eetlepel sneeuwmeel en 1 eetlepel kerstkruiden

Context van het probleem: In een verkeersnetwerk worden bijvoorbeeld de capaciteiten gegeven waar aan voldaan moet worden. Vaak staat slechts een basiscapaciteit ter beschikking die gecombineerd moet worden. In een verkeersnet moet bijvoorbeeld een bus van een buslijn elke 10, 20 of 30 minuten vertrekken. Elk ritme zorgt voor een basiscapaciteit. We moeten nu beslissen hoeveel buslijnen met welk ritme vertrekken om een bepaalde gegeven minimale capaciteit op te leveren. In het algemeen zijn er meerdere oplossingen en zijn vooral in de minimale oplossingen interessant. Dit geldt ook voor de kerstwaarde waarbij de stemmingsfactoren van de ingrediënten de kerstwaarde precies opleveren of net overschrijden maar je het niet met een eetlepel minder van een bepaald ingrediënt kunt oplossen.



De hoogvlakte Xavia

Autor: Arne Roggensack

Opgave:

Zoals elk jaar moet de kerstman met zijn rendierslee de cadeau's over de hoogvlakte Xavia naar Chaosland brengen en daarbij het bevroren Kwadraatmeer oversteken. Dit is een meer in de vorm van een vierkant met een grootte van 1×1 . Dit meer is berucht vanwege de zeer ongunstige windomstandigheden. De wind kan in verschillende delen van het meer in verschillende richtingen waaien en kan zo sterk zijn dat het rendier de slee niet eens meer vooruit krijgt.

De kerstman heeft echter in de afgelopen jaren veel aantekeningen gemaakt. Daardoor weet hij waar de slee, afhankelijk van zijn huidige positie (x, y) , na een volgende tijdstap terecht komt:

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, 2y) & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ en } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ (2y, 2x - 1) & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y < \frac{1}{2} \\ (2y - 1, 2x) & \text{als } 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ en } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ (2x - 1, 2y - 1) & \text{als } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ en } \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Om de geschenken op tijd af te leveren moet de kerstman het meer oversteken. Hij kan niet er omheen gaan omdat de wegen daar slecht begaanbaar zijn en hij dan te veel tijd zou verliezen. Daarom wil de kerstman beter begrijpen welke weg de slee, afhankelijk van de startpositie (x_0, y_0) , gaat afleggen. De

kerstman kan een willekeurig startpositie kiezen, zodat de slee elke positie met de coördinaten $0 < x_0 < 1$ en $0 < y_0 < 1$ kan bereiken. Echter - en dat begrijpt de kerstman zelf niet goed - blijken x_0 en y_0 altijd rationale getallen te zijn.



De kerstman heeft nu de volgende vermoedens:

- a) Er is een positie (x_0, y_0) , waarbij de slee stopt met bewegen.
- b) Er is een positie (x_0, y_0) van de slee zodanig dat na één stap de slee ergens anders is, maar na twee stappen weer terug is op (x_0, y_0) .
- c) Er is een positie (x_0, y_0) , van de slee zodanig dat na één de stap de slee ergens anders is, maar na drie stappen weer terug is op (x_0, y_0) .
- d) Er is een positie (x_0, y_0) met $x_0 \neq y_0$, zodanig dat na één de stap de slee ergens anders is, maar na drie stappen weer terug is op (x_0, y_0) .
- e) Voor iedere plaats (x_0, y_0) is de slee na een eindig aantal stappen weer terug op (x_0, y_0) .

- f) De slee kan op elk punt van de westelijke oever van het meer komen, d.w.z. op een plek met de coördinaten $(0, y)$ met $0 < y < 1$.
- g) De slee kan niet op de noordelijke kant van het meer komen, d.w.z. op een plek met de coördinaten $(x, 1)$.
- h) Bij elk natuurlijk getal $n > 1$ is er een punt (x_0, y_0) , zodanig dat na precies n stappen de slee voor de eerste keer in het punt $(0, 0)$ aankomt.
- i) Bij elk natuurlijk getal $n > 1$ is er een punt (x_0, y_0) , zodanig dat na precies n stappen de slee weer in het punt (x_0, y_0) aankomt, terwijl de slee na de eerste stap op een andere locatie was.

Helaas zijn niet alle vermoedens waar. Welke vermoedens kloppen niet?

Mogelijke antwoorden:

- 1. Alleen vermoeden a) is onjuist.
- 2. Alleen vermoeden e) is onjuist.
- 3. Alleen vermoeden h) is onjuist.
- 4. Alleen vermoeden i) is onjuist.
- 5. De vermoedens c) en d) zijn onjuist.
- 6. De vermoedens c) en i) zijn onjuist.
- 7. De vermoedens e) en g) zijn onjuist.
- 8. De vermoedens e) en i) zijn onjuist.
- 9. De vermoedens f), g) en h) zijn onjuist.
- 10. De vermoedens b), c), d) en i) zijn onjuist.



Sneeuwvlokken

Auteur: Oleh Omelchenko (Weierstraß Institut)

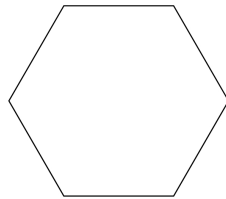


Opgave

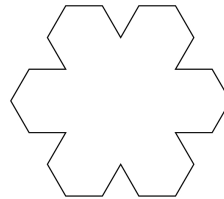
Om de vlakken van een zeshoekig sieraad te beschilderen hebben de elven precies zes tubes goudkleurige verf nodig. Maar wat een schrik! Er was één tube kwijt en de elven weten nu niet wat ze moeten doen. Een elf stelde voor om van de zeshoek een mooie sneeuwvlok te maken. Hiervoor ging hij als volgt aan de slag. Bij de eerste stap sneed hij in het midden bij elke zijde van de zeshoek een gelijkzijdige driehoek uit waarvan de zijden een lengte hebben die gelijk is aan eenderde van de zijde van de zeshoek, zodat er een figuur ontstaat met zijden van gelijke lengten (zie Figuur, stap 1). Dan herhaalt hij deze stap en snijdt op analoge wijze bij elk van die zijden weer een kleinere gelijkzijdige driehoek uit (Zie Figuur, stap 2). Hoe vaak moet de elf de stap

herhalen om aan het einde met de vijf tubes de ontstane sneeuwvlok volledig te kunnen beschilderen?

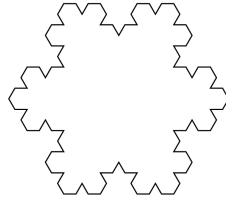
uitgang zeshoek



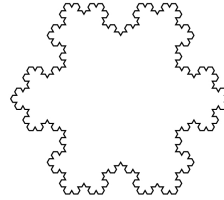
1. stap



2. stap



3. stap



Mogelijke antwoorden:

1. Het is voldoende dat de elf slechts één stap maakt.
2. De elf moet twee stappen maken.
3. De elf moet drie stappen maken.
4. De elf moet vier stappen maken.
5. De elf moet vijf stappen maken.
6. De elf moet zes stappen maken.
7. De elf moet zeven stappen maken.
8. De elf moet acht stappen maken.
9. De elf moet negen stappen maken.
10. De elf moet oneindig veel stappen maken.

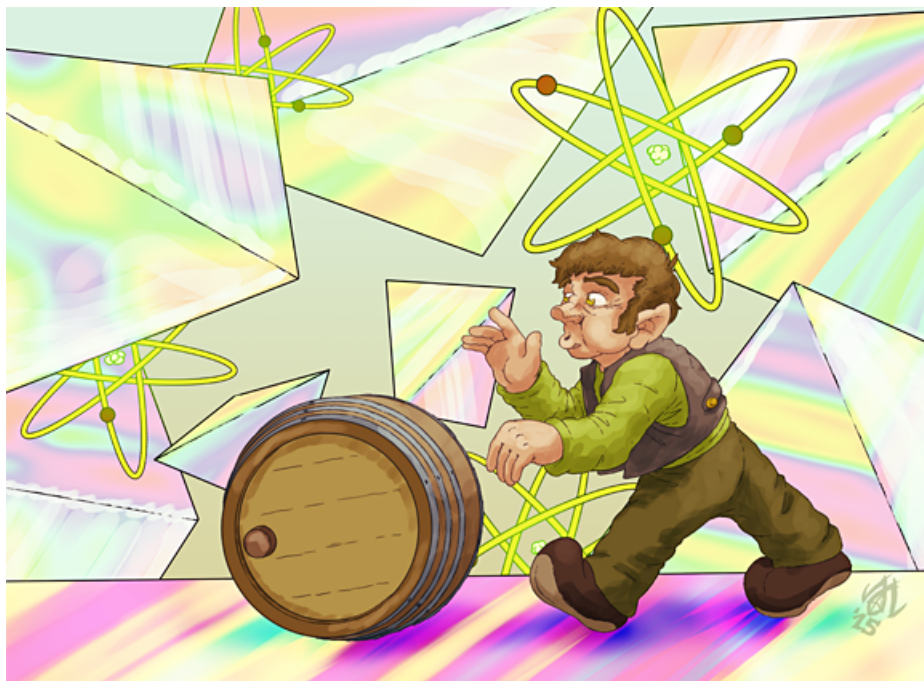


Wijnkelder

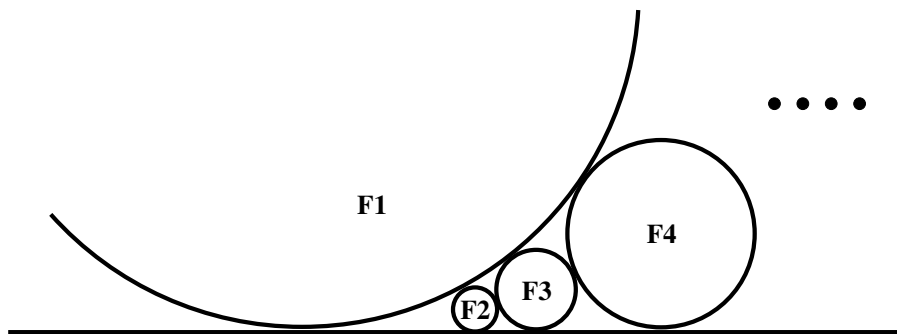
Auteur: Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Opgave

Vandaag ruimen we de oude wijnkelder leeg. In de onderste gewelven zijn honderdeen wijnvaten opgeslagen ($F_1, \dots, F_{101}$) in een ongelooflijke warboel. Elk van deze vaten is cilindervormig; de straal van het grondvlak van vat F_j wordt met r_j aangegeven ($1 \leq j \leq 101$). De vaten zijn van totaal uiteenlopende grootten: zo is bijvoorbeeld de straal r_1 van het reusachtige vat F_1 wel 10 meter, terwijl de straal r_2 van vat F_2 slechts een millimeter bedraagt.



Eerst rolt knecht Ruprecht het supergrote vat F_1 tot aan de muur en laat het daar liggen. Daarna rolt een nano-kabouter het piepkleine vat F_2 onder het eerste vat totdat het tegen het vat F_1 stoot. Een micro-kabouter rolt vervolgens vat F_3 ernaartoe, totdat het zowel het eerste vat F_1 als het tweede vat F_2 raakt. Dan komt een milli-kabouter en rolt die het vat F_4 erbij, totdat deze vat F_1 en vat F_3 beroert. Enzovoort, enzovoort: Voor $5 \leq j \leq 101$ wordt het vat F_j zo ver gerold, dat het de beide vaten F_1 en F_{j-1} raakt. De volgende afbeelding geeft de situatie na vier vaten weer (Merk op: deze schets is niet op schaal getekend.)



Nu vragen we ons af: hoe groot is de straal r_{101} van het grondvlak van het laatste vat F_{101} ?

Mogelijke antwoorden:

1. Ongeveer 10 centimeter
2. Ongeveer 20 centimeter
3. Ongeveer 50 centimeter
4. Ongeveer 1 meter
5. Ongeveer 10 meter
6. Ongeveer 20 meter
7. Ongeveer 50 meter
8. Ongeveer 100 meter
9. Ongeveer 1 kilometer
10. Oneindig groot



Burenstrijd bij de elven

Auteurs: André Nichterlein (TU Berlin), Christian Hercher (FSU Jena)

Opgave

In het planningscentrum van de pakjesfabriek heerst grote paniek. De hoofdelf Alpga en de elf-inzetsplanner Aleph proberen een probleem op te lossen.

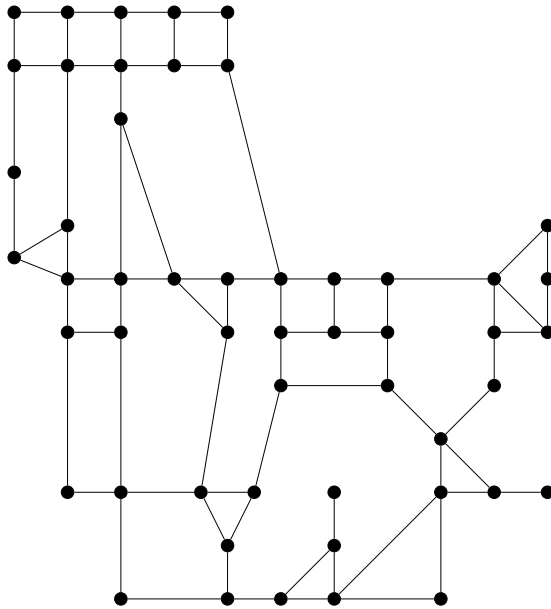
Aleph: „Ahhhh! Wat is hier toch aan de hand. Gisteren liep alles nog helemaal normaal. En vandaag? Plotseling wil Anton niet meer met Paula werken, Fred niet meer met Richard, enz. Ik heb het geprobeerd! Maar als ik twee van deze elven op het matje roep dan kunnen we nooit 'het probleem' oplossen. Veel vaker zorgden ze er met hun ruzie voor dat anderen van hun werk werden gehouden! Wat is er toch aan de hand met het klassieke kerstfeest.“

Alpha: „Ja, ik heb er ook al over gehoord. Sinds gisteravond ruzieën plotseling vele elven onder elkaar. En dit zonder enige reden! Ik vermoed dat hier een saboteur achter steekt: iemand moet iets in de punch gedaan hebben om deze strijdcultuur op te roepen. Dat kan eigenlijk alleen de Grinch geweest zijn...“

Aleph: „Die weer! Kan hij ons niet een keer met rust laten, deze mopperpot.“
„Ok, hij is nu eenmaal zo maar hoe gaan wij hier nu mee om?“

Alpha: „Heel eenvoudig: we sturen een paar elven naar huis zodat we alleen nog elven in de fabriek hebben die geen ruzie met elkaar maken.“

Aleph: „Ik heb de situatie zoals die zich nu voordoet eens weergegeven: de punten stellen elven voor en een lijn tussen twee elven geeft aan dat deze op basis van hun ruzie niet meer willen samenwerken.“



Aleph: „Moeten we dan maar willekeurig groepen samenstellen en proberen of die groep functioneert? Ik wil er graag zo weinig mogelijk naar huis sturen.“

Alpha: „We moeten een systeem ontwikkelen om elven uit te zoeken die we naar huis moeten sturen. We kunnen bijvoorbeeld de volgende regel gebruiken:

(Regel -1) *Als een elf maar met een enkele andere elf ruzie heeft dan kunnen we altijd de eerste behouden en de ander naar huis sturen. Daarbij los je mogelijk meerdere conflicten op maar minstens één conflict wordt hiermee opgelost. We kunnen dus zonder verder na te denken de tweede van beide naar huis sturen.*

Aleph: „Klopt maar helaas betreft deze vereenvoudiging maar twee elven in de hele fabriek; dat helpt ons dus niet veel. De meeste elven hebben nu eenmaal ruzie met twee of meer elven. Kun je me voor dat geval nog wat voorstellen?“

Alpha: „Kunnen we deze regel niet eenvoudig ook in deze situatie toepassen? Dus bijvoorbeeld:“

(R0) *Als een elf met precies twee andere elven ruzie heeft dan sturen we deze beide andere elven weg.*

Aleph: „Maar als die andere twee elven met niemand anders ruzie hebben dan kan ik toch beter de elf wegsturen die met beide ruzie heeft. In die zin is de regel (R0) niet correct.“

Alpha: „Daar heb je gelijk in. Maar misschien kunnen we deze regel nog repareren.

Ik heb nog andere voorstellen:“

(R1) *Als een elf met precies twee andere elven ruzie heeft die ook onderling ruzie hebben dan sturen we beide andere elven weg.*

(R2) *Als een elf met precies twee andere elven ruzie heeft, die onderling geen ruzie hebben maar beide wel ruzie hebben met verdere elven, dan sturen we deze beide elven weg.*

(R3) *Als een elf met precies twee andere elven ruzie heeft die ook onderling ruzie hebben en beide ruzie hebben met nog verdere elven dan sturen we beide andere elven weg.*

Aleph: „Maar zijn deze regels nu correct of worden hierdoor onnodig veel elven naar huis gestuurd?“



Vraag Welke van de volgende uitspraken is correct

Mogelijke antwoorden:

1. Aleph kan een team van 30 of meer elven bouwen die onderling geen ruzies meer hebben.
2. R1, R2 en R3 zijn allemaal correct.
3. R1 en R2 zijn correct maar R3 is niet correct.
4. R1 en R3 zijn correct maar R2 is niet correct.
5. R2 en R3 zijn correct maar R1 is niet correct.
6. R3 is correct maar R1 en R2 zijn niet correct.
7. R2 is correct maar R1 en R3 zijn niet correct.
8. R1 is correct maar R2 en R3 zijn niet correct.
9. R1, R2 en R3 zijn geen van alle correct.
10. Het is voor Aleph niet mogelijk om 20 elven te vinden die onderling geen ruzies meer hebben.

Context van het probleem:

Als we de elven als knopen op een graaf zien (zie grafentheorie) en we een lijn tussen twee knopen plaatsen als de elven niet met elkaar kunnen werken dan zoeken we hier een minimale knopenoverdekking (engels: vertex cover). Je zoekt een zo klein mogelijke verzameling van knopen zodat elke lijn in deze graaf minstens een eindpunt heeft in de geselecteerde verzameling van knopen.

Dit probleem is NP-volledig, d.w.z. we weten vrij zeker dat er geen snel algoritme (in polynomiale tijd) bestaat die dit probleem voor alle mogelijke gevallen oplost. Maar hoe gaan we hier dan mee om? In de praktijk komen we toch vaak van dit soort NP-volledige problemen tegen...

Een goed begin is het om „eenvoudige delen“ direct aan te pakken; en de moeilijke rest (het zogenaamde kernprobleem), dat dan niet meer efficiënt kan worden opgelost, is dan hopelijk zo klein dat ook inefficiënte algoritmen in redelijke tijd een oplossing kunnen vinden.

Deze „preprocessing“-stap is een techniek, die met zeer groot succes in verschillende algoritmen wordt ingezet. Theoretisch onderzoek om de efficiëntie en grenzen van deze techniek te bepalen vindt plaats in de context van parametrische algoritmen.



Kerstballen op verschillende hoogten

Auteur: Marlijn Staps (Universiteit Utrecht)

Opgave:

De elven zijn begonnen met het versieren van de kerstboom. Ze hangen zilveren en gouden kerstballen in de boom. Daarbij kijken ze alleen naar de posities waar de haken van de kerstballen in de boom opgehangen worden. Als eerste hangen ze de haak van een gouden kerstbal op 50cm boven de grond. Elke volgende bol hangen ze hoger dan alle ballen die al in de boom hangen.



De elven spreken af dat het hoogteverschil tussen de eerste en tweede haak groter moet zijn als het hoogteverschil tussen de tweede en derde haak en dat moet weer groter zijn dan het hoogteverschil tussen de derde en vierde haak, enz.

De haak van de tweede bal is minder dan 60 cm hoog verslaafd.

Bovendien hebben de elven de volgende regel afgesproken: gouden ballen kunnen alleen opgehangen worden op de hoogte van gehele decimeters. Zo kan dus bijvoorbeeld alleen op de hoogte van 50cm, 60cm, 70cm, enz. een gouden bal worden opgehangen.

De elven hangen 11 gouden kerstballen volgens deze regel in de boom. Hoeveel zilveren kerstballen hebben we hiervoor minstens nodig?

Antwoordmogelijkheden:

1. 28 zilveren kerstballen
2. 30 zilveren kerstballen
3. 32 zilveren kerstballen
4. 36 zilveren kerstballen
5. 40 zilveren kerstballen
6. 42 zilveren kerstballen
7. 44 zilveren kerstballen
8. 45 zilveren kerstballen
9. 48 zilveren kerstballen
10. 55 zilveren kerstballen



Sneeuwkastelen

Auteurs: Hajo Broersma (Universiteit Twente)

Cor Hurkens (TU Eindhoven)

Opgave

Eindelijk heeft het dan gesneeuwd! De twintig dwergen Atto, Bilbo, Chico, Dondo, Espo, Frodo, Gumbo, Harpo, Izzo, Jacco, Kuffo, Loco, Mirko, Nemmo, Onno, Puzzo, Quibo, Rambo, Saxxo en Tebbo hebben vier sneeuwkastelen gebouwd en een sneeuwballengevecht georganiseerd. Het kasteel in het noorden werd door negen dwergen bezet, in het west-kasteel zaten zeven dwergen, in het zuiden hielden drie dwergen het fort, en het eenmans kasteel in het oosten werd door één enkele dwerg verdedigd. Elke dwerg wist met zijn sneeuwballen precies drie dwergen van andere kastelen te raken. Hieronder volgt een tabel met de treffers:

Atto:	Dondo, Gumbo, Saxxo	Kuffo:	Nemmo, Puzzo, Tebbo
Bilbo:	Espo, Kuffo, Saxxo	Loco:	Atto, Chico, Quibo
Chico:	Harpo, Jacco, Saxxo	Mirko:	Harpo, Jacco, Quibo
Dondo:	Atto, Quibo, Rambo	Nemmo:	Dondo, Jacco, Loco
Espo:	Bilbo, Nemmo, Puzzo	Onno:	Atto, Chico, Mirko
Frodo:	Jacco, Loco, Tebbo	Puzzo:	Jacco, Loco, Tebbo
Gumbo:	Harpo, Nemmo, Rambo	Quibo:	Bilbo, Mirko, Saxxo
Harpo:	Loco, Onno, Quibo	Rambo:	Espo, Jacco, Tebbo
Izzo:	Harpo, Kuffo, Onno	Saxxo:	Frodo, Kuffo, Loco
Jacco:	Bilbo, Frodo, Saxxo	Tebbo:	Espo, Gumbo, Nemmo



Welke van de volgende uitspraken is van toepassing op dit sneeuwballengevecht?

Mogelijke antwoorden:

1. Atto en Bilbo waren beide in het westen.
2. Chico en Dondo waren beide in het noorden.
3. Espo was in het westen en Frodo in het oosten.
4. Gumbo zat in het oosten en Harpo in het zuiden.
5. Izzo en Jacco waren beide in het zuiden.
6. Kuffo was in het noorden en Loco in het westen.
7. Mirko en Nemmo waren beide in het oosten.
8. Onno was in het zuiden en Puzzo in het noorden.
9. Quibo was in het oosten en Rambo in het noorden.
10. Saxxo was in het westen en Tebbo in het zuiden.



Vertragsactie

Auteur: Martin Hoefler

Opgave:

Vandaag rijdt de Kerstman over een 240 kilometer lange piste. Hij heeft in zijn slee een nieuwe Tom Tom navigatiesysteem geïnstalleerd. Na een uur reizen begint de Tom Tom plotseling het volgende te brabbelen:

“ Onder de veronderstelling dat de gemiddelde snelheid van de rest van deze reis gelijk is aan de gemiddelde snelheid van de reis tot nu toe, zal de resterende reistijd nog drie uur bedragen”

De rendieren hebben een hekel aan de Tom Tom en beginnen aan een “langzaam” actie van 6 uur. De slee glijdt steeds trager onderwijl de Tom Tom voortdurend en steeds weer opnieuw en opnieuw en dat 6 uur lang brabbelt:

“ Onder de veronderstelling dat de gemiddelde snelheid van de rest van deze reis gelijk is aan de gemiddelde snelheid van de reis tot nu toe, zal de resterende reistijd drie uur bedragen”,



Hoeveel kilometer heeft de slee gedurende de langzaamactie afgelegd?

Mogelijke antwoorden:

1. 101 Kilometer
2. 102 Kilometer
3. 103 Kilometer
4. 104 Kilometer
5. 105 Kilometer
6. 106 Kilometer
7. 107 Kilometer
8. 108 Kilometer
9. 109 Kilometer
10. 110 Kilometer

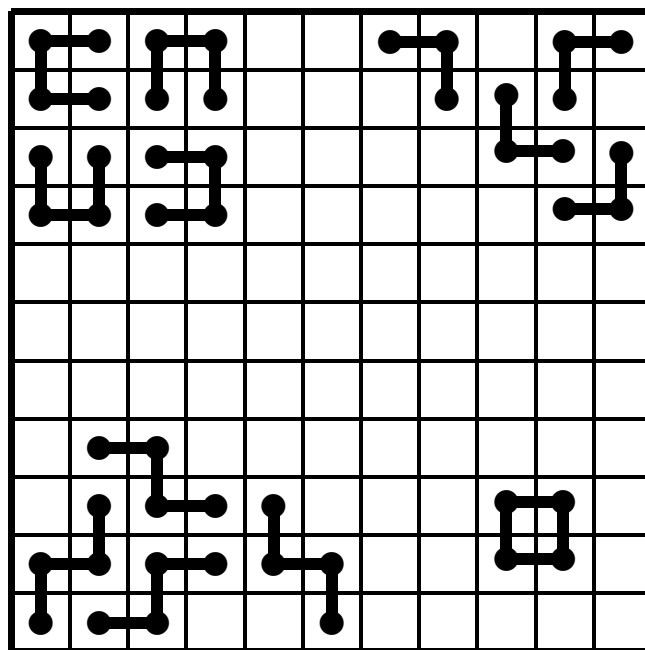


Mondriaan

Auteur: Hajo Broersma (Universiteit Twente;)

Opgave

De Nederlandse kunstschilder Mondriaan heeft vierkante kerstkaarten ontworpen die hij in 121 kleinere vierkanten heeft onderverdeeld. Vervolgens wil hij de kerstkaarten met vier verschillende motieven versieren, namelijk met de volgende motieven: C-motieven (linksboven afgebeeld), Z-motieven (linksonder), O-motieven (rechtsonder) en L-motieven (rechtsboven).



Mondriaan heeft daarbij een voorkeur voor de fraaie C-motieven, de prachtige Z-motieven en de betoverende O-motieven. Het liefst vermijdt hij daar-

bij zoveel mogelijk het gebruik van de kleine, nietszeggende, eenvoudige L-motieven. Mondriaan versiert een kerstkaart met deze motieven op zo'n manier dat elk van de 121 vierkanten door precies één van de motieven bedekt wordt. De vraag is nu: Wat is het kleinst mogelijke aantal L-motieven dat Mondriaan daarbij gebruiken kan?



Mogelijke antwoorden:

1. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 3.
2. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 7.
3. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 11.
4. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 15.
5. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 19.
6. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 23.
7. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 27.
8. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 31.
9. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 35.
10. Het kleinst mogelijke aantal L-motieven is 39.



Gelijke bepakking

Author: Judith Keijsper (TU Eindhoven)

Opgave

De rendieren van de Kerstman hebben vandaag een slecht humeur. Wanneer de Kerstman zijn beide sleden vol laadt met kadootjes, snauwen ze hem toe: “Wij eisen gelijke behandeling! Wij eisen gelijke kansen! Beide sleden moeten precies even zwaar beladen worden! Wij eisen gelijke bepakking!”

De N kadootjes zijn $1, 2, 3, 4, \dots, N$ kilogram zwaar. De Kerstman roept de rekenelf Arithbert te hulp, en na een kleine wiskundige analyse laden de Kerstman en Arithbert de beide sleden vol.

“En?”, vraagt de Kerstman aan zijn rendieren. “Beide ladingen zijn precies even zwaar. Zijn jullie nu tevreden?” Dat had hij beter niet kunnen vragen. “Nee!”, schreeuwen de rendieren. “Natuurlijk zijn we niet tevreden! Er liggen te veel kadootjes op de sleden. Wij eisen dat je er vier kadootjes vanaf haalt! Van iedere slee twee!” Wij eisen lichter werk!”

“Goed, dan haal ik toch van iedere slee twee kadootjes af”, zegt de Kerstman. “Dat is niet zo moeilijk.” Maar Arithbert schudt zijn hoofd: “Welke kadootjes je er ook vanaf haalt, de beide ladingen zijn daarna niet meer even zwaar. We zullen de kadootjes ook opnieuw over de sledes moeten verdelen.”



“En zonder de kadootjes opnieuw te verdelen kunnen we de ladingen niet even zwaar maken?”, vraagt de Kerstman. “Nee”, zegt Arithbert. “Dat is wiskundig onmogelijk.”

En de vraag is nu: welke waarde heeft N ?

Mogelijke antwoorden:

1. $N = 100$
2. $N = 103$
3. $N = 104$
4. $N = 107$
5. $N = 108$
6. $N = 111$
7. $N = 112$
8. $N = 115$
9. $N = 116$
10. $N = 119$



De klok met de rode knop

Auteur: Onno Boxma (TU Eindhoven)

Opgave

Knecht Ruprecht bezit een zeldzaam met krullen versierd oud uurwerk met de cijfers 1 tot en met 12 op de wijzerplaat. Het uurwerk heeft slechts één wijzer en op de achterkant een grote rode knop. Wanneer Ruprecht de wijzer op 12 zet en op de rode knop drukt, dan gebeurt het volgende:



Met kans $1/2$ springt de wijzer op het cijfer 1 (de buur van 12 in de klokrichting) en met kans $1/2$ op het cijfer 11 (de buur van 12 tegengesteld aan de klokrichting). De wijzer blijft gedurende één seconde op het nieuwe cijfer staan en springt vervolgens, telkens met kans $1/2$, naar een van de twee naaste burens (in de richting en tegengesteld aan de richting van de klok) verder. Deze stap

wordt steeds herhaald. De wijzer springt net zo lang verder totdat elk van de cijfers $1, 2, \dots, 11$ minstens één keer wordt bezocht. Dan blijft de wijzer bij het laatst bezochte cijfer definitief staan.

De kans dat de wijzer dan uiteindelijk op het cijfer i ($1 \leq i \leq 12$) blijft staan, geven we aan met $p(i)$.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

Mogelijke antwoorden:

1. $p(1) + p(2) < p(10) + p(11)$
2. $p(6) < p(5) < p(4) < p(3)$
3. $p(6) > p(5) > p(4) > p(3)$
4. $p(12) > 0$
5. $p(2) + p(3) + p(4) = p(5) + p(6)$
6. $p(3) + p(5) > p(8) + p(11)$
7. $3p(4) < 2p(6)$
8. $p(6) > 1/10$
9. $p(2) = p(6)$
10. $p(1) < 1/16$



Twelve points go to ...

Autor: Falk Ebert

Opgave:

Wat doen rendieren eigenlijk wanneer ze niet gewoon een oude man in een slee vol met cadeautjes door de wijk trekken? Inderdaad: Ze vervelen zich. Daarom deden ze vorig jaar mee aan het PVC - het Polar Vision Songfestival. Een totaal van vier rendieren hadden de genadeloze voorrondes overleefd en waren in de finale gekomen. Deze finalisten waren: Amalthea, Blitz, Conchita en Dalek. Na hun briljante optreden werden de deelnemers door een vierhoofdige jury beoordeeld en kregen van elk jurylid punten voor hun prestatie. Elk lid gaf voor de beste bijdrage p_1 punten, p_2 punten waren voor de tweede plaats, p_3 punten voor de derde plaats en p_4 punten waren er voor de slechtste bijdrage.



De meningen van de juryleden verschilden hierbij nogal sterk. Twee leden van de jury kozen bijvoorbeeld Amalthea als eerste, een ander jurylid rangschikte haar als derde en één lid vond haar zelf het slechtste.

Hier zijn de individuele beoordelingen van de juryleden bij alle vier de finalisten:

Amalthea:	$2 \times$ plaats 1, $1 \times$ plaats 3, $1 \times$ plaats 4
Blitzen:	$1 \times$ plaats 1, $2 \times$ plaats 2, $1 \times$ plaats 3
Conchita:	$1 \times$ plaats 1, $3 \times$ plaats 4
Dalek:	$2 \times$ plaats 2, $2 \times$ plaats 3

De organisatoren van de PSC gebruikte aanvankelijk het oude puntensysteem van de Grand Prix Euro Vision Songfestival uit het jaar 1962. Hierbij kreeg de beste bijdrage $p_1 = 3$ punten en elk plaats lager werd beloond met één punt minder: $p_k = 4 - k, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Door dit systeem won Blitz de PSC met 8 punten, wat leidde tot grote vreugde bij de fans van Blitz. De fans van de andere deelnemers waren echter heel boos en wilden een ander puntensysteem. Maandenlang was er ruzie over de beste puntenverdeling en nu in december wordt er nog steeds besproken hoe de punten in de toekomst moeten worden verdeeld. Eigenlijk ligt alleen vast dat voor het nieuwe puntensysteem de volgende voorwaarden moeten gelden:

1. $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4$
2. De punten zijn gehele getallen groter of gelijk aan 0.
3. De punten zijn zo gekozen dat er geen gelijke stand kan optreden.

Ervan uitgaande dat aan al deze voorwaarden is voldaan: Welke van de volgende uitspraken is dan onjuist:

Mogelijke antwoorden:

1. Het is inderdaad mogelijk een puntensysteem te vinden zonder dat er een gelijke stand kan optreden.
2. Amalthea heeft altijd een hoger totaal aantal punten dan Conchita.
3. Blitz heeft altijd een hoger totaal aantal punten dan Dalek.
4. Wanneer Blitz en Conchita hun punten samenvoegen hebben ze altijd een hoger totaal aantal punten dan de andere twee deelnemers ieder individueel hebben.

5. Dalek kan in het beste geval op de 2e plaats in het algemeen klassement komen.
6. Conchita kan in het beste geval op de 3e plaats in het algemeen klassement komen.
7. Blitz bereikt de eerste of de tweede plaats in het algemeen klassement.
8. Amalthea kan in het slechtste geval op de 2e plaats in het algemeen klassement komen..
9. Conchita komt alleen niet op de laatste plaats in het algemeen klassement als Dalek laatste is.
10. In de meeste gevallen wint Blitz het klassement.