



Jongleren

Auteur: Cor Hurkens (TU Eindhoven; c.a.j.hurkens@tue.nl)

Opgave

In het Wintercircuit jongleert vandaag de magische sneeuwman Snebulus met ballen, kegels, tetraëders, en dobbelstenen. Af en toe mompelt hij daarbij een sterke toverspreuk:

Ebrecedebre verandert een bal in een kegel en een tetraëder

Ibricidibri verandert een kegel in twee tetraëders en een dobbelsteen

Obrocodobro verandert een tetraëder in een dobbelsteen en drie ballen

Ubrucudubru verandert een dobbelsteen in een bal en vier kegels

Wanneer Snebulus een toverspreuk omdraait, werkt deze in de omgekeerde richting:

erbedecerbE verandert een kegel en een tetraëder in een bal

irbidicirbI verandert twee tetraëders en een dobbelsteen in een kegel

orbodocorbO verandert een dobbelsteen en drie ballen in een tetraëder

urbuducurbU verandert een bal en vier kegels in een dobbelsteen

Op dit moment jongleert Snebulus met slechts één enkele kegel (en dus geen bal, geen tetraëder en geen dobbelsteen). Snebulus zou graag de volgende vier jongleersituaties bereiken:

B: Minstens vijf ballen, maar geen kegel, tetraëder of dobbelsteen

K: Minstens vijf kegels, maar geen bal, tetraëder of dobbelsteen

T: Minstens vijf tetraëders, maar geen bal, kegel of dobbelsteen

D: Minstens vijf dobbelstenen, maar geen bal, kegel of tetraëder

Het publiek bekruipt een ademloze spanning: welke van deze situaties kan Snebulus daadwerkelijk bereiken door alleen zijn toverwoorden te gebruiken?

1. B, K, T en D
2. Slechts B, K en T
3. Slechts B, K en D

4. Slechts B, T en D
5. Slechts K, T en D
6. Slechts B en K
7. Slechts B en T
8. Slechts B en D
9. Slechts K en T
10. Slechts K en D



Kerstsudoku

Auteur: Marcus Weber (Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin)

Opgave

In de toegepaste wiskunde is het vaak belangrijk, die eigenschappen van een systeem te identificeren die onveranderlijk zijn, ook als het systeem op een bepaalde manier verandert. Vaak gaat het bij zulke eigenschappen om symmetrieën in het systeem, bijv. mogelijke permutaties van oplossingen van een probleem.

Sudoku-raadsels geven een mooi oefenvoorbeeld voor het begrijpen van de eigenschappen van permutaties.

Bij de drie gegeven Sudoku-raadsels moeten de cijfers 1 tot 5 zo in de vrije velden worden ingevuld, dat per rij, per kolom en per kleur-deel ieder cijfer precies één keer gebruikt wordt.

Afhankelijk van hoeveel en welke cijfers gegeven zijn, is het Sudoku-raadsel oplosbaar of niet oplosbaar. Verder kan het in het geval dat het oplosbaar is een unieke oplossing hebben of er zijn meerdere oplossingen mogelijk. In het vervolg gaat het om zulke vragen. Nog een opmerking: Past dit raadsel bij de kerst? Er zijn geen 24, maar 25 velden, maar er is wel een kerstster aanwezig en er is een antwoord dat bij de kerst past...

Belangrijk: Precies één van de volgende uitspraken is juist. Welke?

Sudoku A

				1
		☆		2
	2			3
		1		4

Sudoku B

				1
		☆		
	2			3
		1		4

Mogelijke antwoorden:

1. Er is een mogelijkheid om in Sudoku A alleen de cijfers 1, 2 en 3 op een geschikte manier te geven, zodat de Sudoku daarna alleen nog één oplossing heeft, dwz. precies één oplossing bestaat.
2. Veronderstel dat we sommige cijfers in Sudoku A al zo gegeven hebben dat de Sudoku een eenduidige oplossing heeft. Een permutatie van de gegeven velden (daardoor ontstaat een nieuw Sudoku) zorgt in elk geval ervoor dat de Sudoku niet eenduidig oplosbaar wordt.
3. Stel je de rijen van het Sudoku voor als een vijfcijferig getal (in het decimale stelsel). Dan bestaat er een oplossing van Sudoku A, zodat niet precies één van deze getallen door 15 deelbaar is.
4. Er is een oplossing van Sudoku A waarvoor de cijfers in een rij (van rechts naar links gelezen) in dezelfde volgorde staan als de cijfers in een kolom (van boven naar beneden gelezen).
5. Er is een oplossing van Sudoku A, waarvoor de som van de getallen in één van de diagonalen 24 is.
6. Sudoku B is oplosbaar, maar niet uniek oplosbaar.
7. Het Sudoku B is uniek oplosbaar en in de oplossing staat op het veld met de kerstster een 4.
8. Sudoku C is uniek oplosbaar.
9. Sudoku C is niet uniek oplosbaar. Er is een oplossing, waarvoor op het veld met de kerstster een 2 staat.
10. De uitvinder van het raadsel geeft - verkleed als kerstman - Sudokus als kerstcadeau aan zijn familieleden.

Projectverband:

Een vaak toegepast principe is het uitsluitingsprincipe. Om iets te bewijzen sluit je alle alternatieven uit. Dit principe speelt niet alleen bij bewijzen een grote rol, maar ook in de statistische thermodynamica. Als een systeem niet in één van de buurtoestanden verandert, dan moet het zich nog in de oorspronkelijke toestand bevinden. Dit speelt een grote rol bij het tellen van systeemovergangen.



1 Koffer-spel

Auteurs:

Cor Hurkens (TU Eindhoven; c.a.j.hurkens@tue.nl)

Frits Spieksma (KU Leuven; Frits.Spieksma@econ.kuleuven.be)

Opgave

In een lange rij staan 101 koffers, die opeenvolgend genummerd zijn met de getallen $0, 1, 2, \dots, 100$. De Grinch en Knecht Ruprecht spelen met deze koffers het T -koffer-spel (waarbij T een positief geheel getal is).

- De Grinch kiest twee getallen x en y met $0 \leq x, y \leq 100$ en $|x - y| \leq 50$, en verstopt Ruprechts kurkentrekker in koffer x en een fles rum in koffer y . Alle andere koffers blijven leeg.
- Knecht Ruprecht mag dan in de rij in totaal T koffers openmaken: de eerste koffer mag Ruprecht willekeurig kiezen. Elke volgende koffer mag alleen geopend worden, wanneer aangrenzend links of rechts daarvan reeds een koffer geopend is.

Knecht Ruprecht wint het spel, wanneer hij zowel de kurkentrekker als de fles rum vindt; anders wint de Grinch. Beide spelers maken keuzen die voor henzelf het meest gunstig zijn. We definiëren p (respectievelijk q en r) als de kans dat Ruprecht het 60-koffer-spel (respectievelijk het 70-koffer-spel, en het 80-koffer-spel) wint. Welke van de volgende uitspraken is waar?

1. $p = 30/101$, en $q = 40/101$, en $r = 50/101$.
2. $p = 60/101$, en $q = 70/101$, en $r = 80/101$.
3. $p = 3/9$, en $q = 4/9$, en $r = 5/9$.
4. $p = 3/10$, en $q = 4/10$, en $r = 5/10$.
5. $p = 3/11$, en $q = 4/11$, en $r = 5/11$.
6. $p = 3/12$, en $q = 4/12$, en $r = 5/12$.
7. $p = 1/6$, en $q = 1/3$, en $r = 2/3$.
8. $p = 1/4$, en $q = 1/3$, en $r = 1/2$.

- 9. $p = 1/3$, en $q = 1/3$, en $r = 1/3$.
- 10. $p = 1/3$, en $q = 1/3$, en $r = 1/2$.

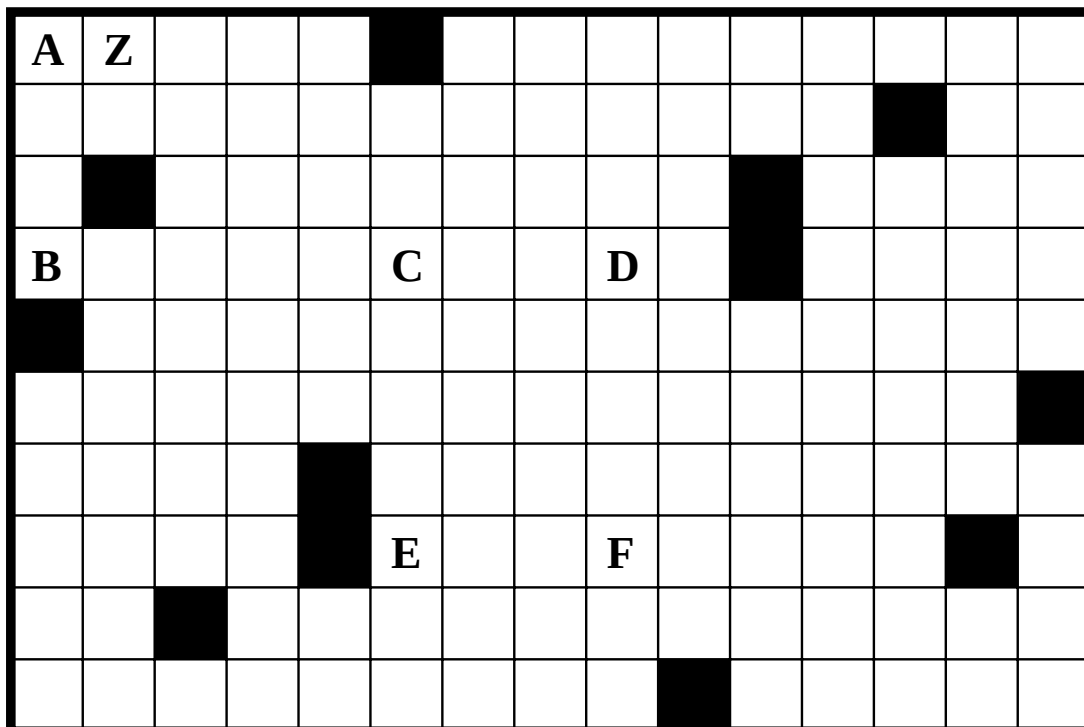


Mondriaan

Auteur: Hajo Broersma (Universiteit Twente; H.J.Broersma@utwente.nl)

Opgavetekst

De Nederlandse kunstschilder Piet Mondriaan heeft een kerstkaart ontworpen die in 150 kleine vierkanten is onderverdeeld. Twaalf van deze vierkanten zijn al zwart geschilderd. Nu doopt Mondriaan zijn penseel diep in de pot met rode verf en schildert hij alle 138 nog witte vierkanten in één lange ononderbroken penseelstreek rood. Hierbij begint hij in vierkant *A*, gaat hij daarna via de twee tussengelegen witte vierkanten direct verticaal door naar vierkant *B*, en gaat hij zo steeds verder naar een naburig nog wit vierkant dat aan het laatste zojuist roodgeverfde vierkant met één van de zijden grenst. Hierbij wordt elk vierkant precies één keer met het penseel doorkruist en komt het penseel als laatste in vierkant *Z* uit.



In welke volgorde heeft Mondriaan de vier vierkanten C , D , E , F rood geschilderd?

1. C-D-E-F
2. C-E-D-F
3. C-E-F-D
4. D-C-F-E
5. D-F-E-C
6. E-C-F-D
7. E-D-F-C
8. E-F-D-C
9. F-D-C-E
10. F-E-D-C



Verkiezing van de Kerstman

Auteurs: Max Klimm (TU Berlin), Antje Lehmann (TU Berlin)

Opgave

De Kerstman is bij het skiën hard gevallen en moet dit jaar tijdens de kerstnacht in bed blijven. Een van de kerstkabouters moet hem daarom vervangen. Omdat elke kabouter graag de Kerstman wil spelen, ontstaat er tussen de kabouters een strijd om wie een waardige vervanger van de Kerstman kan zijn.

Uiteindelijk besluiten de kabouters te stemmen. Elke kabouter moet die kabouters nomineren, waarvan hij denkt dat deze in de (toegegeven erg grote) voetstappen van de Kerstman kunnen treden. Daarbij mag hij niet zichzelf nomineren, en hij mag een andere kabouter niet meer dan één keer nomineren. (Hij mag ook niemand nomineren.)

Bij een proefstemming onder de kabouters **Alex**, **Bente** en **Chris** ontstond het volgende opiniebeeld

opiniebeeld

- **A** nomineert **C**,
- **B** nomineert **A** en **C**,
- **C** nomineert niemand.

Zou men bij dit opiniebeeld willekeurig en uniform (d.w.z. met gelijke kansen) een kabouter kiezen onder die kandidaten met de meeste nominaties, dan is dit met kans 1 kabouter **C**.

Nu bedenkt kabouter **A** dat hij bij een andere keuze van zijn nominaties, de kans, dat hijzelf uitgekozen wordt, kan veranderen. Nomineert hij bijvoorbeeld **B** in plaats van **C** dan wordt hij zelf met kans $1/3$ uitgekozen.

De kabouters willen nu een verkiezingsmethode ontwerpen, die voor alle mogelijke opiniebeelden met een willekeurig aantal kabouters toepasbaar is. Het doel daarbij is dat de kans, waarmee een kabouter gekozen wordt, onafhankelijk is van de nominaties die hijzelf doet. Laten we zo'n methode *niet manipuleerbaar* noemen.

Het hoeft niet zo te zijn dat bij een methode altijd de kabouter met de meeste nominaties gekozen wordt. Na dagenlang overpeinzen werden de volgende methoden voorgesteld.

Willekeurige winnaar. Er wordt één kabouter willekeurig (uniform) gekozen als vervanger van de Kerstman.

Willekeurige beslisser. Eerst wordt er één kabouter willekeurig (uniform) gekozen die tot „beslisser“ wordt benoemd. Als de beslisser geen nominatie heeft afgegeven, dan wordt er willekeurig (uniform) een van de andere kabouters gekozen als vervanger van de Kerstman. Anders wordt er willekeurig (uniform) een kabouter gekozen als vervanger van de Kerstman uit de lijst van genomineerden die de beslisser zelf heeft opgesteld.

Dubbele willekeurige winnaar. Eerst wordt de methode **willekeurige winnaar** tweemaal uitgevoerd. Laat X de kabouter zijn die de eerste keer wordt gekozen, en laat Y de uitkomst zijn bij de tweede keer. Vervolgens wordt uit de uitkomsten X en Y die kabouter gekozen met de meeste nominaties. In het geval dat ze precies hetzelfde aantal nominaties behaald hebben, wordt tussen hen een willekeurige winnaar gekozen, met gelijke kans.

Partitiemethode. Elke kabouter werpt een eerlijke munt. Als bij iedere kabouter de uitkomst „munt“ is, dan wordt de methode **willekeurige winnaar** toegepast. Is dit niet het geval, dan wordt uit de kabouters met de uitkomst „kop“ van die kandidaten met de meeste nominaties

ontvangen van de kabouters met de uitkomst “munt”, er willekeurig (uniform) een gekozen als winnaar.

Welke van de volgende uitspraken is **fout**?

Antwoordmogelijkheden:

1. Bij toepassing van de methode **willekeurige winnaar** op bovenstaande uitslag worden **A**, **B** en **C** elk met een kans van $\frac{1}{3}$ gekozen.
2. Bij toepassing van de methode **willekeurige beslisser** op bovenstaande uitslag wordt **A** met kans $\frac{1}{3}$, **B** met kans $\frac{1}{6}$ en **C** met kans $\frac{1}{2}$ gekozen.
3. Bij toepassing van de methode **dubbele willekeurige winnaar** op bovenstaande uitslag wordt **A** met kans $\frac{3}{9}$, **B** met kans $\frac{1}{9}$ en **C** met kans $\frac{5}{9}$ gekozen.
4. Bij toepassing van de **partitiemethode** op bovenstaande uitslag wordt **A** met kans $\frac{16}{48}$, **B** met kans $\frac{13}{48}$ en **C** met kans $\frac{19}{48}$ gekozen.
5. De methode **willekeurige winnaar** is niet manipuleerbaar.
6. De methode **willekeurige beslisser** is niet manipuleerbaar.
7. De methode **dubbele willekeurige winnaar** is niet manipuleerbaar.
8. De **partitiemethode** is niet manipuleerbaar.
9. Voor alle opiniebeelden geldt:
Bij toepassing van de **partitiemethode** is het verwachte aantal nominaties van de winnaar van de verkiezing tenminste een kwart van het maximaal aantal nominaties behaald door een kabouter.
10. Er is geen niet te manipuleren verkiezingsmethode die voor alle opiniebeelden met twee kabouters en precies één genomineerde, de genomineerde kabouter met kans 1 kiest.



Bamboestruiken

Auteur: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven; gwoegi@win.tue.nl)

Vertaling: Aart Blokhuis (TU Eindhoven; a.blokhuis@tue.nl)

Tekst van de opgave

Diep in de duisterste schachten in het mijnbouwgebied van de kabouters groeien prachtige bamboestruiken van zuiver kristal. Elke struik bestaat uit één of meer stengels, elke stengel uit één of meer segmenten. Om de wild woekerende bamboeprijsjungle enigszins onder controle te krijgen heeft het ministerie voor Kaboutereconomie een nieuwe wet uitgevaardigd. Deze “*Wet voor de ontwikkeling, regulering en verbetering van de kristalbamboemarkt in Kabouterland*” schrijft de volgende randvoorwaarden voor betreffende de prijzen van bamboe.

- §1 De prijs van een kristallen bamboestruik hangt uitsluitend af van het aantal stengels, en van het aantal segmenten van de afzonderlijke stengels, maar niet van de volgorde of de vorm van deze stengels.
- §2 De prijs van een bamboestruik is een positief geheel aantal euro's.
- §3 De prijs van een bamboestruik met één enkele stengel wordt vastgesteld op 1 euro.
- §4 Extra stengels of extra segmenten mogen de prijs van een struik niet verlagen.
- §5 In het geval dat er in een struik één enkele stengel bijgroeit, mag de prijs daardoor met hooguit 1 euro verhoogd worden.
- §6 Onstaat uit struik X met prijs p euro, door het aangroeien van een enkele extra stengel met p segmenten (dezelfde p !) een nieuwe struik Y , en vervolgens uit deze nieuwe struik Y door het aangroeien van precies één extra segment aan elke stengel een derde struik Z , dan mag de prijs van Y niet hoger zijn dan die van X , maar de prijs van Z moet wel hoger zijn dan die van X .

(De ambtelijke kabouter taal in deze zes paragrafen en in het bijzonder de onbegrijpelijke laatste paragraaf brengen de kristalbamboemarkt in Kabouterland bijna tot stilstand.)

Kabouter Christiaan wil drie wondermooie bamboestruiken met elk 120 stengels aan de kabouter vrouw Gisela verkopen. De eerste struik heeft 120 stengels, met respectievelijk

1, 2, 3, 4, $\dots$, 120 segmenten. De tweede struik heeft 40 stengels met 33, 40 stengels met 66, en 40 stengels met 99 segmenten. De derde struik heeft 120 stengels met elk 31 segmenten. Wat is de allerlaagste prijs K en de allerhoogste prijs G , die Christiaan volgens de “Wet voor de ontwikkeling, regulering en verbetering van de kristalbamboemarkt in Kabouterland” voor zijn drie struiken van Gisela mag verlangen?

1. $K = 3$ en $G = 360$
2. $K = 64$ en $G = 216$
3. $K = 120$ en $G = 240$
4. $K = 128$ en $G = 128$
5. $K = 128$ en $G = 256$
6. $K = 144$ en $G = 166$
7. $K = 157$ en $G = 157$
8. $K = 169$ en $G = 289$
9. $K = 177$ en $G = 214$
10. $K = 256$ en $G = 256$



Handjeklap

Auteur: Stefan Felsner (TU Berlin)

Vertaling: Aart Blokhuis (TU Eindhoven)

1.1 Opgave

Tussen Ahuizen in het westen en Bedum in het oosten loopt een 10 Kilometer lange straat in een rechte lijn door het woud. Langs de kant van deze weg tussen de beide stadjes staat na elke kilometer een kilometersteen. Op elk van deze 9 stenen zit een kabouter en kijkt uit over de straat, hetzij in oostelijke hetzij in westelijke richting. Om 12 uur beginnen alle kabouters in de richting waarin ze uitkeken te wandelen, allemaal met een constante snelheid van 5 kilometer per uur. Komen twee kabouters elkaar tegen, dan doen ze een handjeklap, draaien zich ter plekke 180 graden om en wandelen zonder tijd te verliezen in de omgekeerde richting bij elkaar vandaan. Zodra een kabouter in Ahuizen of Bedum arriveert, neemt hij plaats in de gaarkeuken.

Bij vragen 2 en 3 nemen we aan, dat de kijkrichting aan het begin van de verschillende kabouters door onafhankelijke worpen met een munt bepaald worden.

Vragen:

1. Ten hoogste hoeveel minuten kan het duren voordat alle kabouters in een van beide gaarkeukens gearriveerd zijn?
2. Wat is de verwachting voor het aantal kilometers dat de kabouters in totaal afleggen voordat ze in allemaal in de gaarkeukens zitten.

3. Wat is de kans p dat de kabouter van Kilometersteen 4 eindigt in de gaarkeuken in Bedum? (We ronden p af op twee decimalen).

Mogelijke antwoorden, in de vorm (antwoord 1)(antwoord 2)(antwoord 3):

1. (120)(54)(0,20)
2. (108)(45)(0,25)
3. (204)(40)(0,33)
4. (120)(36)(0,35)
5. (108)(54)(0,38)
6. (204)(45)(0,20)
7. (120)(40)(0,25)
8. (108)(36)(0,33)
9. (204)(54)(0,35)
10. (120)(45)(0,38)



Picasso

Auteur: Gerhard Woeginger (TU Eindhoven; gwoegi@win.tue.nl)

Opgave

Niemand weet, op welke duistere wijze de Grinch een (bijna) echte Picasso heeft weten te bemachtigen. Maar in ieder geval biedt hij het schilderij nu te koop aan, en zes ultra-eerlijke, hyperintelligente en superzelfzuchtige kabouters hebben interesse. Kabouter Atto zegt dat het schilderij voor hem 9610 euro waard is. Voor Bilbo is het 6727 euro waard, voor Chico 4805 euro, voor Dondo 3968 euro en voor Espo 3100 euro. De gierige Femto tenslotte heeft slechts 279 euro ervoor over.

De Grinch stelt voor dat de kabouters het schilderij gezamenlijk kopen; dan kan ieder van hen er van genieten wanneer hij maar wil. Omdat het schilderij dan van iedereen is, vindt de Grinch het niet meer dan eerlijk dat ook ieder van hen zijn volle prijs ervoor betaalt: Atto moet 9610 euro betalen, Bilbo 6727, Chico 4805, Dondo 3968, Espo 3100 Euro en de gierige Femto moet 279 euro betalen. Maar nee, nee en nog eens nee: dat voorstel bevalt de superzelfzuchtige kabouters helemaal niet. Ieder wil het schilderij ofwel voor zich alleen, of anders helemaal niet hebben.

De Grinch besluit daarom, een Grote Pablo Picasso Loterij (GPPL) te organiseren. Elke kabouter kan bij de Grinch zoveel GPPL-loten (of zelfs fracties daarvan) kopen als hij wil, voor 1 euro per lot; en de Picasso wordt dan onder alle verkochte GPPL-loten verloot.

Na lang nadenken kopen de zes hyperintelligente kabouters hun GPPL-loten. Verrassend genoeg maximaliseert de resulterende verdeling van de loten voor elke individuele kabouter de verwachte eigen winst: geen enkele kabouter zou zijn winstverwachting kunnen verbeteren door ook maar een honderdste of een miljoenste lot meer te kopen, of zelfs maar een miljardste lot minder. De verwachte eigen winst wordt door de volgende formule bepaald:

$$(\text{waarde van het schilderij}) \times \frac{\text{aantal eigen GPPL-loten}}{\text{totaal aantal verkochte GPPL-loten}} - (\text{lotaankoopbedrag})$$

In deze formule geeft de breuk de kans aan dat de kabouter de loterij wint. De waarde van het schilderij is het bedrag dat de kabouter het schilderij zelf waard vindt. Het lotaankoopbedrag is natuurlijk het bedrag dat de kabouter voor zijn loten heeft betaald. Welke uitspraak klopt?

1. Atto koopt 5107 GPPL-loten, en de Grinch haalt 9270 Euro op.

2. Atto koopt 2100 GPPL-loten, en de Grinch haalt 6510 Euro op.
3. Bilbo koopt 1596 GPPL-loten, en de Grinch haalt 4123 Euro op.
4. Bilbo koopt 1288 GPPL-loten, en de Grinch haalt 4991 Euro op.
5. Chico koopt 650 GPPL-loten, en de Grinch haalt 4030 Euro op.
6. Chico koopt 420 GPPL-loten, en de Grinch haalt 4340 Euro op.
7. Dondo koopt 744 GPPL-loten, en de Grinch haalt 2976 Euro op.
8. Dondo koopt helemaal geen lot, en de Grinch haalt 4740 Euro op.
9. Espo koopt 496 GPPL-loten, en de Grinch haalt 2480 Euro op.
10. De gierige Femto koopt 2 GPPL-loten, en de Grinch haalt 2480 Euro op.



's Lands wijs, 's lands eer

Auteur: Falk Ebert

1.1 Opgave

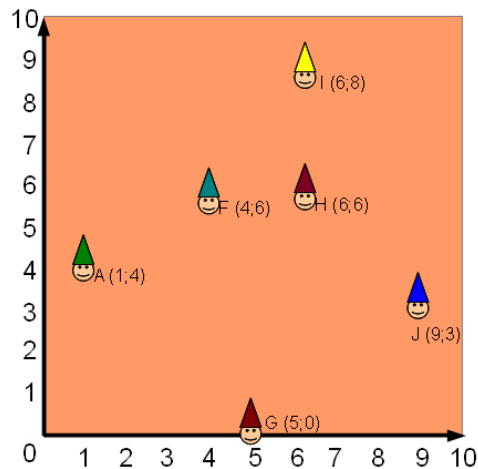
Waarschuwing: De volgende tekst kan met name op jongere Wiskundekalenderdeelnemers een traumatiserend effect hebben. Zij dienen zo nodig door een troostende volwassene begeleid te worden.

“Weet je, soms ben ik echt blij dat in de VS (en andere landen) de cadeaus asynchroon verdeeld worden”, zegt de Kerstman tegen Voro. Voro is een jonge kabouter, die dit jaar voor het eerst met de kerstfabriek meedraait. Als deze de Kerstman vragend aankijkt, verklaart die verder:

“Nou ja, in Duitsland kom ik met de zak aan de deur, bel aan, wacht, word binnengelaten en kijk de kinderen kritisch maar welwillend aan. Dan worden er liedjes gezongen en gedichten voorgedragen, ik deel de cadeaus uit, zeg nog een keer *Hohoho!* en loop verder naar de volgende deur. Je moet steeds tegelijk met de ontvangers op dezelfde plek zijn—synchroon dus. En als een familie nog aan de kerstwandeling is, dan raakt je hele planning in de war.” De kabouter kijkt wat geschrokken, maar vraagt vol begrip: “En in Amerika is dat beter?”

“Precies. Daar gaat alles asynchroon. De kinderen slapen en de bezorging vindt transkaminaal plaats—dat wil zeggen, door de schoorsteen.” Weer knikt de kabouter begrijpend.

“En daar kom jij bij kijken. Omdat ik het in Europa zo druk heb, worden de cadeaus in de asynchrone zones—dus de VS en zo—door kabouters ver-



Figuur 1: Kaart van Quadratorado met ingetekende cadeaupakhuizen.

deeld.”

De Kerstman haalt een kaart tevoorschijn. “Zie je, de Verenigde Staten zijn meetkundig zo eenvoudig. Neem bijvoorbeeld Quadratorado. Op deze plekken”, hij tekent een paar punten op de kaart, “zijn zes cadeaupakhuizen. En zes kabouters voorzien de hele staat van cadeaus.”

“Maar wie doet welke buurt?”

“Dat is eenvoudig. Elke kabouter gaat naar alle punten, die dicht bij zijn pakhuys liggen dan bij alle andere pakhuizen. Daarmee hoort dus elk punt bij een kabouter. En de punten waar toevallig twee of meer pakhuizen het dichtst bij staan, daar staan geen schoorstenen—voordat je betweterig gaat doen!” De Kerstman kijkt kritisch, maar welwillend. Dan vertelt hij nog over nepsledes en luidspreekerhohoho’s, maar Voro luistert niet meer. Hij probeert uit te vogelen, welk pakhuys hij moet kiezen, om voor een zo groot mogelijk oppervlak verantwoordelijk te zijn—hij wil immers een goede indruk maken op de Kerstman.

De figuur stelt de kaart van Quadratorado voor, en bevat een vierkant 10×10 -rooster. Er staan zes cadeaupakhuizen op, met de kabouters die er tot nu toe werkten. Wiens pakhuys moet de vlijtige kabouter kiezen?

Mogelijke antwoorden:

1. A (Anna Lemma)
2. F (Friedemann der Friese)
3. G (Geronimo)
4. H (Hieronymo)
5. I (Inka Reis)
6. J (Jordan)
7. Alle gebieden zijn even groot.
8. Inka's en Friedemanns gebied zijn even groot, en groter dan alle andere.
9. Anna's en Inka's gebied zijn even groot, en groter dan alle andere.
10. De gegevens volstaan niet om eenduidig het (de) grootste gebied(en) te kunnen aanwijzen.



Mijlpalen

Auteur: Georg Prokert (TU Eindhoven; g.prokert@tue.nl)

Opgave

De Kerstman vliegt vandaag met zijn helikopter naar de Caraïben, om op het cirkelvormige Adventseiland tropisch hardhout te verzamelen. Zijn pilootkabouter vertelt hem, dat er op het eiland zeven mijlpalen staan, respectievelijk gemarkeerd met de letters A , B , C , D , E , F en G . Deze mijlpalen hebben de volgende eigenschappen:

- De mijlpalen A , B , C staan alledrie op de uiterste rand van het eiland.
- Mijlpaal D staat precies midden tussen A en B .
- Mijlpaal E bevindt zich in het middelpunt van het cirkelvormige eiland.
- Mijlpaal F staat op het hoogtepunt van de driehoek ABC .
- Mijlpaal G staat op het snijpunt van de lijn door A en B met de lijn door C en F .
- De vier mijlpalen D , E , F , G vormen een rechthoek $DEFG$.
- De afstanden DE en FG bedragen 24 mijl, en de afstanden DG en EF bedragen 11 mijl.

Op het eiland zijn drie helikopterlandplaatsen, bij de mijlpalen A , B en C . Het mooiste hardhout groeit bij mijlpaal F . De Kerstman vraagt aan de pilootkabouter: hoe ver is dat mooiste hardhout (mijlpaal F) van de dichtstbijzijnde helikopterlandplaats (A of B of C)?

1. 40 mijl
2. 41 mijl
3. 42 mijl
4. 43 mijl
5. 44 mijl
6. 45 mijl
7. 46 mijl
8. 47 mijl
9. 48 mijl
10. 49 mijl



Tafeltennis

Auteur: Rudi Pendavingh (TU Eindhoven; rudi@win.tue.nl)

Opgavetext

Op het grote tafeltennistournooi hebben vijf dwergen uit elk van de vijf plaatsen Yshuizen, Vriezendaal, Rillevoetsluis, Koudenburg en Sneeuwwijk deelgenomen. Onder de 25 deelnemers werden eerst de startnummers 1 tot en met 25 verloot. Vervolgens speelde elke dwerg precies één keer tegen elk van de twintig dwergen uit een van de andere vier plaatsen. Er gebeurde iets tamelijk ongelofelijks. In elke wedstrijd won de dwerg met het hoogste startnummer! Nog ongelofelijker waren de resultaten per plaats:

- Yshuizen won minstens 0 van de 25 spellen tegen Vriezendaal.
- Vriezendaal won minstens 0 van de 25 spellen tegen Rillevoetsluis.
- Rillevoetsluis won minstens 0 van de 25 spellen tegen Koudenburg.
- Koudenburg won minstens 0 van de 25 spellen tegen Sneeuwwijk.
- Sneeuwwijk won minstens 0 van de 25 spellen tegen Yshuizen.

Het ware natuurlijk nog veel ongelofelijker geweest, als in deze vijf zinnen het getal 0 (“minstens 0 van de 25 spellen”) elke keer een groter getal x was (“minstens x van de 25 spellen”). De vraag is: wat is het grootste getal x waarvoor dit verhaal nog waar kan zijn?

1. $x = 13$
2. $x = 14$
3. $x = 15$
4. $x = 16$
5. $x = 17$
6. $x = 18$
7. $x = 19$
8. $x = 20$
9. $x = 21$
10. $x = 22$



Een bijzondere kerstpostbestelling

Auteurs: Daniël Kroes en Merlijn Staps

Opgave. Ook dit jaar zal de kerstman, net als in alle andere jaren, van 1 december tot en met 24 december met een arreslee de Mathekalenderopgaven verspreiden. Aangezien dit minder zwaar is dan het verspreiden van de cadeau's heeft hij hiervoor een andere slee. Deze slee hoeft, in tegenstelling tot de gewone arreslee, door slechts vier rendieren voortgetrokken te worden. Deze rendieren lopen in een rijtje achter elkaar. De kerstman heeft hiervoor ook vier aparte rendieren, Norbert, Olivier, Pieter en Quinten in dienst. Echter het favoriete rendier van de kerstman, Rudolf, loopt elke ook dag mee en bovendien altijd voorop. Dit betekent dat elke dag één van de vier rendieren niet mee hoeft te lopen en dus rust krijgt. Verontwaardigd over deze voorkeurspositie willen de andere rendieren zo min mogelijk met Rudolf te maken hebben. Ze eisen dat geen van hen twee dagen achter elkaar achter Rudolf hoeft te lopen en dat ze na een rustdag niet meteen achter Rudolf hoeven te lopen. Verder willen ze, ongeduldig dat ze zijn, nooit twee rustdagen achter elkaar hebben. De kerstman besluit toe te geven aan deze eisen en merkt verder op dat er precies $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ mogelijke combinaties om één rendier rust te geven en de andere drie over de drie resterende plekken voor de slee te verdelen. Om de rendieren niet nog verontwaardigder te laten worden besluit hij dat elke mogelijke combinatie voor moet komen.

Hij vraagt één van zijn kerstkabouters een schema te maken, waarbij hij zelf nog een eis toevoegt. Om in ieder geval nog een beetje de orde te bewaren wil hij graag dat als twee rendieren op twee opeenvolgende dagen lopen, dat op beide dagen van deze rendieren hetzelfde rendier het verst vooraan staat (dus het dichtst bij Rudolf).

Wat is het maximale aantal dagen dat één van de vier rendieren achter elkaar mee kan gaan om de opgaven te verspreiden? We hebben het hierbij over Norbert, Olivier, Pieter en Quinten; we laten Rudolf dus verder buiten beschouwing.

1. Er bestaat een schema waarbij een rendier 2 dagen achter elkaar mee gaat, maar geen schema waarbij een rendier minstens 3 dagen achter elkaar mee gaat.

2. Er bestaat een schema waarbij een rendier 3 dagen achter elkaar mee gaat, maar geen schema waarbij een rendier minstens 4 dagen achter elkaar mee gaat.
3. Er bestaat een schema waarbij een rendier 4 dagen achter elkaar mee gaat, maar geen schema waarbij een rendier minstens 5 dagen achter elkaar mee gaat.
4. Er bestaat een schema waarbij een rendier 5 dagen achter elkaar mee gaat, maar geen schema waarbij een rendier minstens 6 dagen achter elkaar mee gaat.
5. Er bestaat een schema waarbij een rendier 6 dagen achter elkaar mee gaat, maar geen schema waarbij een rendier minstens 7 dagen achter elkaar mee gaat.
6. Er bestaat een schema waarbij een rendier 7 dagen achter elkaar mee gaat, maar geen schema waarbij een rendier minstens 8 dagen achter elkaar mee gaat.
7. Er bestaat een schema waarbij een rendier 8 dagen achter elkaar mee gaat, maar geen schema waarbij een rendier minstens 9 dagen achter elkaar mee gaat.
8. Er bestaat een schema waarbij een rendier 9 dagen achter elkaar mee gaat, maar geen schema waarbij een rendier minstens 10 dagen achter elkaar mee gaat.
9. Er bestaat een schema waarbij een rendier 18 dagen achter elkaar mee gaat, maar geen schema waarbij een rendier minstens 19 dagen achter elkaar mee gaat.
10. Er bestaat geen enkel schema waarbij aan alle eisen wordt voldaan.



Radioverkeer

Author: Hennie ter Morsche (TU Eindhoven; h.g.termorsche@tue.nl)

Aufgabentext

Vandaag hebben de vier hulpkerstmannen Arthur, Benny, Clemens en Daniel met hun zwaarbeladen sleeën over de Noordpoolpiste gereisd. Elke slee legde de gehele weg met een constante snelheid af (maar onderling met verschillende snelheden). Zij vertrokken op verschillende tijdstippen. Arthur, Benny en Clemens begonnen hun reis aan het eindpunt van de piste in het westen en Daniel aan het eindpunt in het oosten. Wij hebben in de loop van de dag de volgende radiogesprekken van hun geregistreerd.

11:00 Arthur: Centrale, graag melden. Hier spreekt Arthur. Ik haal zojuist Benny in en ben er al aan voorbij. Over.

12:00 Arthur: Centrale, nu haal ik ook Clemens in. Huiiii! Over!

13:00 Daniel: Centrale, hier Daniel. Arthur komt me zojuist tegemoet geraasd. Man, wat een immense snelheid. Over.

15:00 Benny: Centrale, graag melden. Hier spreekt Benny. Ik trof zojuist Daniel aan. Over.

17:00 Clemens: Centrale, Hier Clemens, ik kwam zojuist Daniel tegen. Hij heeft mij uiterst vrolijk toegezwaaid. Over.

Welke van de volgende uitspraken is waar?

1. Benny heeft Clemens om 13:30 uur ingehaald.
2. Benny heeft Clemens om 13:35 uur ingehaald.
3. Benny heeft Clemens om 13:40 uur ingehaald.
4. Benny heeft Clemens om 13:45 uur ingehaald.
5. Benny heeft Clemens om 13:50 uur ingehaald.
6. Benny heeft Clemens om 13:55 uur ingehaald.
7. Benny heeft Clemens om 14:00 uur ingehaald.
8. Benny heeft Clemens om 14:05 uur ingehaald.

9. Benny heeft Clemens om 14:10 uur ingehaald.
10. Benny heeft Clemens om 14:15 uur ingehaald.



De weddenschap

De alfabetkabouters maken ook dit jaar weer een alfabetische lijst van alle kinderen die zoet en stout zijn geweest. Helaas is kabouter Harold zijn lijst met de letter 'H' kwijt, hetgeen voor veel verwarring zorgt. Er is niet genoeg tijd om een nieuwe lijst samen te stellen, en daarom besluiten de andere kabouters een toevalslijst te maken. Door het herhaald werpen van een eerlijke munt kennen zij aan ieder kind met de letter 'H' de status “zoet” of “stout” toe.

Om de verveling te verdrijven besluiten de drie kabouters Belinda, Emiel en Ute een weddenschap af te sluiten op het voorkomen van zekere deelsequenties.

- **kabouter Belinda**

In de lijst verschijnt de sequentie “zoet - zoet - zoet - stout” vóór de sequenties van kabouters Emiel en Ute.

- **kabouter Emiel**

In de lijst verschijnt de sequentie “stout - stout - zoet - stout” vóór de sequenties van kabouters Belinda en Ute.

- **kabouter Ute**

In de lijst verschijnt de sequentie “zoet - stout - zoet - zoet” vóór de sequenties van kabouters Belinda en Emiel.

Welk geheel getal tussen 1 en 10 is de noemer van de (zover mogelijk vereenvoudigde) breuk die de winstkans geeft van de kabouter wiens sequentie de kleinste kans heeft als eerste op te treden?

Mogelijke antwoorden:

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

- 5. 5
- 6. 6
- 7. 7
- 8. 8
- 9. 9
- 10. 10



Ongeluk op de Noordpool

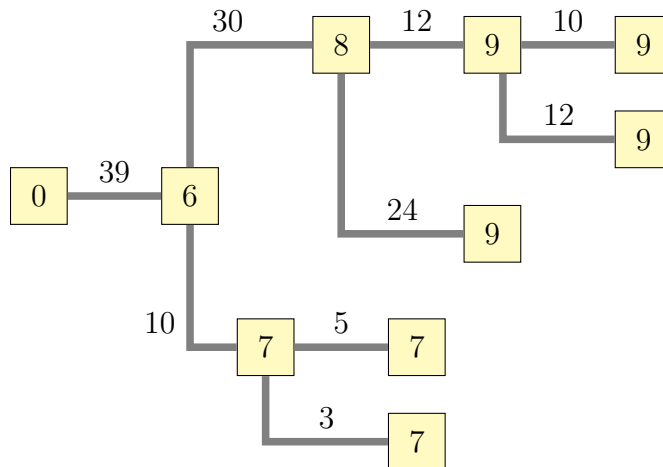
Auteur: Martin Groß (TU Berlin)

1.1 Opgave

Op maandag vertrok de kabouter hopman voor een korte vakantie. Op woensdag at rendier Rudolf alle 72 pagina's van de aanwijzingen van de kabouter hopman. Het gevolg: een rendier met ernstige maagpijn en volledige chaos in de pakjesfabriek. De aflevering van toverstof door de nieuw aangeschafte tovergljbaan was volledig tot stilstand gekomen en de productie van de pakjesfabriek lag stil. Na een lange discussie werd kabouter Wendy aangewezen¹ om het probleem op te lossen of de kabouter hopman van vakantie terug te roepen². Uit de nog beschikbare, spaarzame handleidingen is op te maken dat de tovergljbaan uit een rij leidingen en knopen bestaat die toverstof van vijf niveaus van de pakjesfabriek transporteren. Knopen (in de afbeelding als vierkanten aangegeven) zijn de punten waar of meerdere leidingen bij elkaar komen of de opslagruimtes en de fabriek.

¹Zij had het kortste stroompje getrokken

²Wat geen optie was



De glij&weg instellingen stellen ons in staat om voor elke opslagruimte aan te geven hoeveel toverstof ze in de leiding moeten pompen. Om er voor te zorgen dat de toverstof door de leiding stroomt moet de druk bij de begin knoop groter zijn dan bij het eind knoop. De preciese hoeveelheid toverstof in een leiding wordt als volgt bepaald:

Laat d een functie zijn die de druk aangeeft in een specifiek knooppunt. Dan is de hoeveelheid toverstof in een leiding met start knooppunt s en eind knooppunt e gelijk aan $|d(s)^2 - d(e)^2|$, waarbij $d(e)$ en $d(s)$ respectievelijk de druk in het start knooppunt en de eind knooppunt aangeven

Om dus bijvoorbeeld drie eenheden aan toverstof in een leiding te pompen waarbij aan de eindknoop een druk van z heerst dan moet de druk aan het startpunt gelijk zijn aan $\sqrt{3 + z^2}$. In elk knooppunt moet evenveel instromen als uitstromen en daardoor wordt de stroom in de resterende leidingen bepaald. Als we een opslagpunt teveel toverstof in de leiding laten pompen dan kan daardoor benodigde maximale druk te hoog worden, elk knooppunt heeft een maximale druk die niet overschreden mag worden en elke leiding geeft een maximale hoeveelheid toverstof die ze kunnen transporteren.

In de afbeelding geven de getallen in de knopen de maximale druk aan en de getallen bij de leidingen de maximale hoeveelheid toverstof in dse leiding (negatieve druk is niet toegestaan).

Kabouter Wendy moet nu de volgende vraag beantwoorden: hoeveel eenheden toverstof kunnen maximaal naar de fabriek getransporteerd worden zonder de parameters voor de leidingen en knopen te overschrijden?

Mogelijke antwoorden:

1. 30
2. 31
3. 32
4. 33
5. 34
6. 35
7. 36
8. 37
9. 38
10. 39

Verband met het project:

Efficiënte netwerkstroom methoden voor niet-stationaire gasstromen (TRR 154)

Het toverstof systeem in deze opgave is een (sterk) vereenvoudigde versie van een transportprobleem die in gasnetwerken optreedt. Het probleem is daar om een gegeven hoeveelheid gas van begin naar eindpunt te transporteren zonder de componenten te veel te belasten of in strijd met voorschriften te handelen.



Vliegveld BEW: Keurig op tijd!

Auteurs: Tobias Keil (HU Berlin), Simon Rösel (HU Berlin), Andrea von Schirp (HU Berlin)

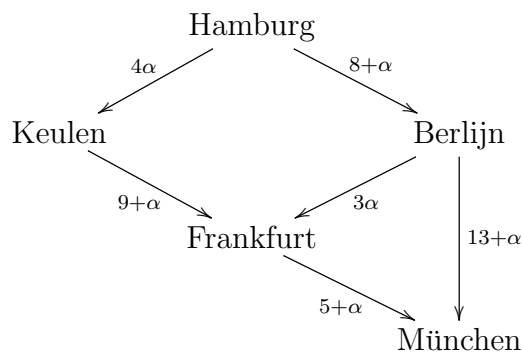
Opgave

„Waarom is alles toch zo moeilijk?“, denkt Hartmut, opper-rendier en hoofd-verantwoordelijke voor het kerstnacht-vliegnetwerk, vertwijfeld. Zoals elk jaar heeft hij zich bekommerd om het onderhoud van zijn vliegveld en zijn vliegtuigen, opdat de zes Super-Pieten, die elk twee ton kerstgeschenken in hun rugzak hebben geladen, hun cadeaus op tijd kunnen uitleveren. Volgens de planning van de Kerstman komen drie Super-Pieten vanuit de Noordpool met hun magische rendiersleden aan in Hamburg (elk met één ton geschenken voor de kinderen in Hamburg, en één ton geschenken voor de kinderen in Frankfurt), en drie Super-Pieten komen aan in Berlijn (elk met één ton geschenken voor de kinderen in Berlijn en één ton geschenken voor de kinderen in München). Na uitleveren van de geschenken voor de plaatselijke jeugd, moeten de Super-Pieten met de overgebleven spullen via de een of andere route doorreizen naar hun tweede bestemming, dat wil zeggen van Hamburg naar Frankfurt, respectievelijk van Berlijn naar München, om aldaar de andere kinderen ook een vreugde te bereiden. Aangezien het kerstnacht-vliegnetwerk helaas met oude, maar snelle en betrouwbare vliegtuigen van het type „Concorde“ wordt uitgevoerd, zijn de respectievelijke vliegtijden weliswaar erg kort, maar ook erg afhankelijk van de hoeveelheid te vervoeren vracht (Super-Pieten wegen niets, alleen het gewicht aan geschenken is van

belang). Bovendien mag omwille van maatregelen tegen geluidsoverlast per verbinding op Kerstavond hoogstens één vlucht worden uitgevoerd. Dat betekent dat wanneer meerdere Super-Pieten eenzelfde verbinding willen gebruiken ze op elkaar moeten wachten en samen de afstand overbruggen, wat het totale vrachtgewicht en daarmee de vliegtijd bepaalt.

Om het overzicht te behouden, heeft Hartmut een gedetailleerd vluchtplan uitgewerkt, dat voor elke vlieg-verbinding de exacte vliegtijd (in minuten) aangeeft, wanneer de hoeveelheid vracht α ton bedraagt. Zoals gezegd doet het gewicht van de Super-Pieten er niet toe.

Vluchtplan:

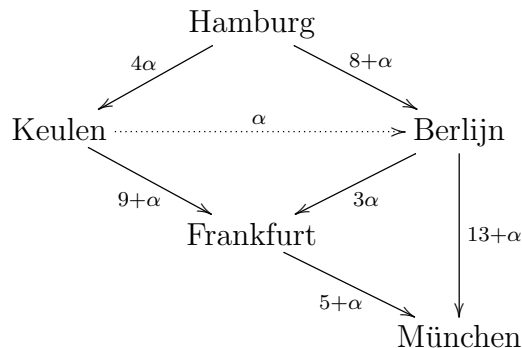


Afgelopen jaar werd hiervoor de volgende indeling gebruikt: van de drie Super-Pieten die in Hamburg startten, vlogen er twee via Keulen naar Frankfurt, en een ging via Berlijn naar Frankfurt. Van de drie die in Berlijn startten, vlogen er twee direct naar München en eentje vloog via Stuttgart naar München. Hieruit maakte Hartmut op, dat de egoïstische Super-Pieten geen onderlinge afspraken maken, maar dat ze elk voor zich een route kiezen die hen bij het einddoel brengt, en waarbij het zo is, dat het voor geen enkel individu mogelijk is om – gegeven dat de andere vijf bij hun keuze blijven – de eigen reistijd korter te maken door een andere route te kiezen. Ook zijn de Super-Pieten niet bereid om de vracht geschenken anders te verdelen, dus brengt elke Super-Piet elke toegewezen ton geschenken naar de hem door de Kerstman toegewezen bestemming. Op deze manier hebben ze in het afgelopen jaar gemiddeld $15\frac{5}{6}$ minuten reistijd nodig gehad.

Afgelopen jaar zijn er helaas klachten gekomen over laat geleverde geschenken. Daarom heeft Hartmut besloten de luchthaven BEW te Berlijn uit te breiden, zodat er nu ook een extra machine van Keulen naar Berlijn ingezet

kan worden, die voor een vracht van α ton een reistijd van α minuten nodig heeft.

Hierdoor ontstaat dan het uitgebreide vluchtplan:



Naar aanleiding van de uitbreiding volgde een telefoontje van de Kerstman die nu precies wilde weten hoe de reistijden in het uitgebreide netwerk zouden veranderen, wanneer de Super-Pieten, net als vorig jaar, weer zó vliegen dat ze elk hun bestemming bereiken, en daarbij geen enkele Super-Piet, bij gelijkblijvende keuze van de andere vijf, in staat is door een routeverandering zijn reistijd te bekorten. Ook moet Hartmut nu aangeven wat de nieuwe gemiddelde reistijd zal zijn. Helaas heeft hij geen idee hoe de Super-Pieten zich nu zullen gedragen. Kun je hem vertellen hoeveel de gemiddelde reistijd zal veranderen door toevoeging van de nieuwe vliegverbinding?

Antwoordmogelijkheden:

- (1) De reistijd wordt $\frac{5}{6}$ minuut korter.
- (2) De reistijd wordt $\frac{51}{54}$ minuut korter.
- (3) De reistijd wordt $\frac{1}{6}$ minuut korter.
- (4) De reistijd wordt $\frac{2}{3}$ minuut langer.
- (5) De reistijd verandert helemaal niet.
- (6) De reistijd wordt $1\frac{1}{6}$ minuut korter.
- (7) De reistijd wordt $\frac{19}{30}$ minuut korter.
- (8) De reistijd wordt $1\frac{1}{3}$ minuut korter.

(9) De reistijd wordt $\frac{2}{3}$ minuut korter.

(10) De reistijd wordt 1 minuut korter.

Probleemachtergrond:

Het vinden van een evenwicht is een klassiek probleem uit de wiskundige speltheorie, waarbij gevraagd wordt naar de oplossingen van meerdere met elkaar samenhangende optimaliseringsproblemen. Deze klasse van problemen kan naadloos worden ingebed in het concept van niet-continue optimalisering, met behulp waarvan je allerlei problemen over de werking en bijsturing van natuurkundige processen kunt beschrijven.



Baarduitval

Auteur: Max von Kleist (FU Berlin)

Opgave

Zeven dagen voor Kerst heeft de Kerstman plotseling baarduitval gekregen. Van zijn prachtige baard, bestaande uit 999 baardharen, is nog slechts één baardhaar over. Zo kan de Kerstman zich niet vertonen! De Noordpool is in rep en roer! Wat te doen? Bij *normale baardgroei* zouden elke dag 3 nieuwe baardharen aangroeien, maar dat is niet voldoende om met Kerst weer 999 baardharen te hebben.

Gelukkig is één van de Kerstkabouters via dubieuze contacten aan een wondermiddel gekomen. Volgens de verpakking doet het middel weliswaar de *normale baardgroei* teniet op een dag dat het gebruikt wordt, maar het verdrievoudigt ook in één klap het aantal haren bij iedere keer dat het gebruikt wordt. Het mag echter niet meer dan één keer per dag gebruikt worden; anders bestaat het gevaar dat men in een Paashaas verandert! Het is dus belangrijk om het middel heel precies in te zetten.

Opdat Kerst als gebruikelijk gevierd kan worden, moeten de kabouters nu het perfecte behandelingsplan bedenken: op welke dagen moet de Kerstman het middel gebruiken, om op de avond van de zevende dag (Kerstavond) weer te kunnen pronken met een prachtige baard bestaande uit precies 999 haren?

Mogelijke antwoorden

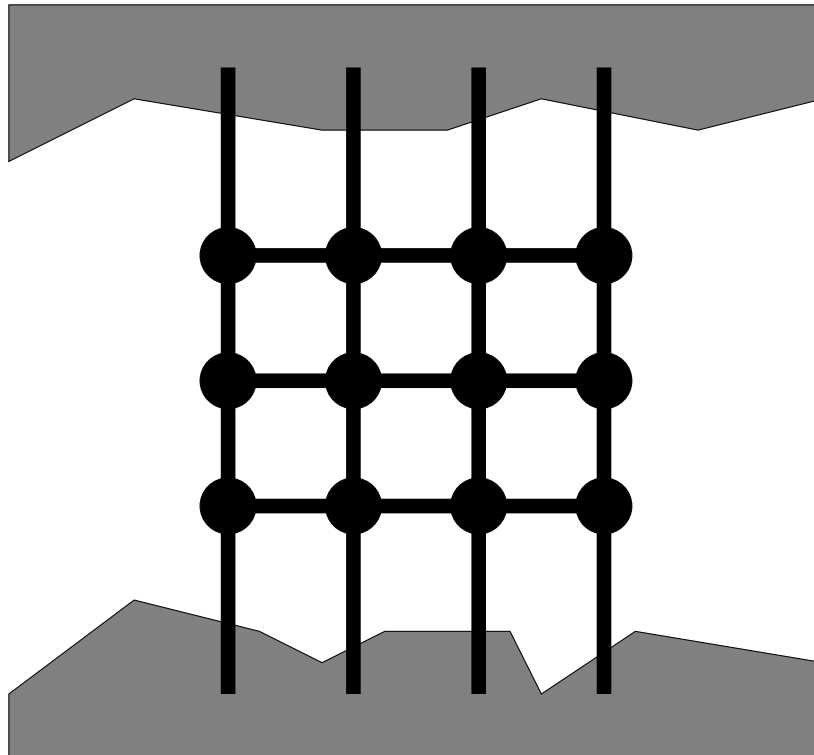
1. Er is geen oplossing. De Kerstman kan beter een overdosis van het middel nemen, zich in een Paashaas veranderen, en chocola verstoppen.
2. De Kerstman moet het middel elke dag innemen.
3. De Kerstman moet het middel vanaf de vierde dag innemen.
4. De Kerstman moet het middel vanaf de derde dag innemen.
5. De Kerstman moet het middel op alle dagen innemen, behalve op de eerste en de laatste dag.
6. De Kerstman moet het middel om de andere dag innemen, te beginnen op de tweede dag.
7. De Kerstman moet het middel om de andere dag innemen, te beginnen op de eerste dag.
8. De Kerstman moet het middel op de 1e, 3e, 5e, 6e en 7e dag innemen.
9. De Kerstman moet het middel op de 2e, 3e, 4e, 6e en 7e dag innemen.
10. De Kerstman moet het middel op de 2e, 3e, 4e, 5e, 6e en 7e dag innemen.



Bruggen over de rivier

Opgave

Aan de noordoever van de rivier bevindt zich de werkplaats van de Kerstman, en aan de zuidoever zijn opslaghal. De beide oevers zijn met elkaar verbonden door een stelsel van 25 bruggen en 12 pijlers.



Vannacht woedt een zware storm. De brugpijlers zijn onverwoestbaar, maar elke brug heeft slechts een kans $1/2$ om de storm te doorstaan. Hoe groot is de kans p dat er morgen nog een verbindingsweg is tussen beide oevers?

1. Er geldt $0.0 \leq p < 0.1$
2. Er geldt $0.1 \leq p < 0.2$

3. Er geldt $0.2 \leq p < 0.3$
4. Er geldt $0.3 \leq p < 0.4$
5. Er geldt $0.4 \leq p < 0.5$
6. Er geldt $0.5 \leq p < 0.6$
7. Er geldt $0.6 \leq p < 0.7$
8. Er geldt $0.7 \leq p < 0.8$
9. Er geldt $0.8 \leq p < 0.9$
10. Er geldt $0.9 \leq p < 1.0$

De vraatzuchtige kerstmuis



Auteur: Dirk Becherer (HU Berlin) und Martin Büttner (HU Berlin)

Opgave

De kerstmuis Paulien kan haar ogen niet geloven! Een feestelijk versierde kerstboom vol met heerlijkheden zoals fondant kerstkransjes, chocolade kerstballen en banketstaven. Haar missie is duidelijk: voordat ze haar winterslaap hervat, wil ze de piek van de boom bereiken en tijdens de tocht naar die piek zoveel mogelijk snoepen. Ze klimt telkens één niveau hoger en gaat daarbij altijd rechtdoor of diagonaal. Bij elke stap heeft ze dus maximaal drie mogelijkheden: recht omhoog, diagonaal naar links of diagonaal naar rechts. De getallen in de afbeelding symboliseren de voedingswaarde van de op de plek aanwezige lekkernij in kilocaloriën.

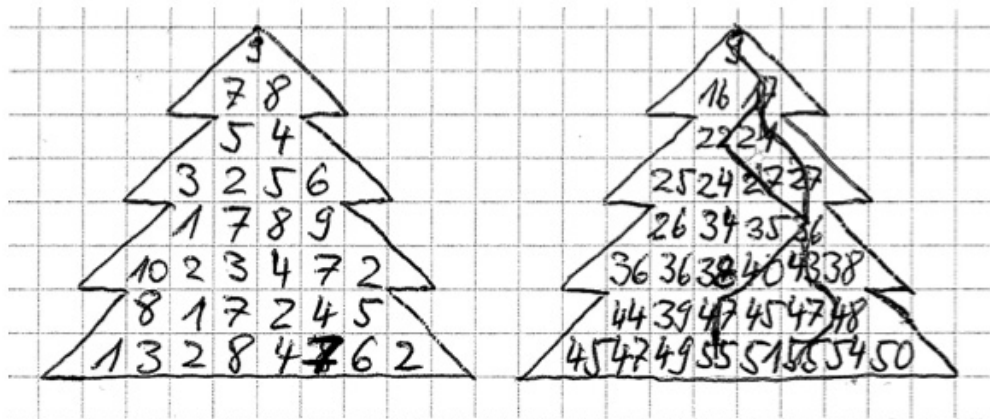
Maar als Paulien op weg wil gaan, vliegt de kerstengel langs die haar vermanend toespreekt: “Hoe kun je zo zelfzuchtig zijn om het kerstplezier van de kinderen te bederven?”. “Sorry”, antwoordt Paulien beduusd, “ik heb honger en zonder wintervet kan ik dit koude seizoen niet overleven.” “Ook jij moet een fijne kersttijd hebben!”, antwoordt de engel genadig, “Je mag je helemaal vol eten! Je moet me dan wel vooraf vertellen hoeveel kaloriën je tijdens je route van beneden naar boven maximaal verorberen kunt.”

Vraag: Hoeveel kilocaloriën kan Paulien tijdens haar route maximaal eten en via hoeveel verschillende routes kan zij dit aantal bereiken?

Mogelijke antwoorden:

1. 0-50 kilocaloriën/precies 1 route

2. 0-50 kilocaloriën/2-5 routes
3. 0-50 kilocaloriën/6-10 routes
4. 0-50 kilocaloriën/11-15 routes
5. 0-50 kilocaloriën/meer dan 15 routes
6. 51-100 kilocaloriën/precies 1 route
7. 51-100 kilocaloriën/2-5 routes
8. 51-100 kilocaloriën/6-10 routes
9. 51-100 kilocaloriën/11-15 routes
10. 51-100 kilocaloriën/meer dan 15 routes





Handen omhoog!

Auteurs:

Cor Hurkens (TU Eindhoven; c.a.j.hurkens@tue.nl)

Gerhard Woeginger (TU Eindhoven; gwoegi@win.tue.nl)

Opgave

De Kerstman zegt tegen vier bozebollen Atto, Bilbo, Chico en Dondo: *“Beste bollebozen! Ook dit jaar hoort in de wiskunde-adventskalender een denkopgave over mutsen op kabouterhoofden te zitten. Daarom nodig ik jullie morgen uit voor een gemoedelijke namiddag met koffie en vlaai.”* — *“Ja fijn, wij komen graag!”*, antwoorden Atto, Bilbo, Chico en Dondo.

De Kerstman vervolgt: *“Vanavond zal ik enkele rode en blauwe kaboutermutsen klaarleggen. Morgen zet ik dan bij elk van jullie van achteren en bliksemsnel een van die mutsen op, en zorg ervoor dat je niet de kleur van je eigen muts te zien krijgt. Jullie kunnen wel de mutsen van elk van de anderen zien, maar mogen daarover geen informatie uitwisselen. Vervolgens worden jullie blinddoeken voorgedaan, en moeten jullie een paar vingers in de lucht steken. Ik bereken dan het totaal aantal vingers opgestoken door kabouters met een rode muts (R), en het totaal aantal vingers opgestoken door kabouters met een blauwe muts (B). Jullie hebben dit spel gewonnen, wanneer R groter is dan B . Heeft er iemand nog vragen?”*

Atto vraagt: *“Er zijn wel zestien mogelijkheden om ons rode en blauwe mutsen op te zetten. Zijn die mogelijkheden alle even waarschijnlijk?”* — *“Ja”*, antwoordt de Kerstman. *“Alle zestien mogelijkheden zijn even waarschijnlijk.”* — Bilbo zegt: *“Mogen we beide handen in de lucht steken?”* — *“Ja”*, zegt de Kerstman. *“Elk van jullie kan 0, 1, 2, ..., 9 of 10 vingers opsteken.”* — Chico vraagt: *“Wat gebeurt er wanneer R en B aan elkaar gelijk zijn?”* — *“Nou, dan hebben jullie verloren. Jullie winnen alleen wanneer $R > B$!”*, antwoordt de Kerstman.

En de bollebozen beginnen te peinzen. Ze discussiëren en denken na. Ze denken na en discussiëren. Dan discussiëren ze verder en denken ze nog dieper na. Tenslotte werken ze een waarlijk geniale strategie uit, die hun winstkans (onder alle mogelijke strategieën!) maximaliseert. Onze vraag is nu: Hoe groot is de winstkans van deze waarlijk geniale strategie?

1. De winstkans is $7/16$.
2. De winstkans is $8/16$.
3. De winstkans is $9/16$.

4. De winstkans is $10/16$.
5. De winstkans is $11/16$.
6. De winstkans is $12/16$.
7. De winstkans is $13/16$.
8. De winstkans is $14/16$.
9. De winstkans is $15/16$.
10. De winstkans is $16/16$.



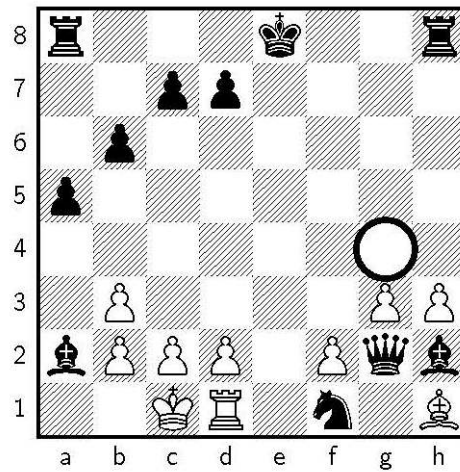
Chocoladeschaak

Auteur: Erhard Zorn

Vertaling: Aart Blokhuis (TU Eindhoven)

Opgave

De afdeling chocoladefiguren van de kerstbanketbakkerij wil graag het assortiment verbreden. Een leverancier van chocoladefiguren heeft om uit te proberen schaakstukvormen klaargezet. De kerstkabouters hebben daarmee schaakstukken van donkere en witte chocola gefabriceerd, die ze op een schaakbord met velden van chocola neergezet hebben. Óin en Glóin testen dit chocoladeschaakspel op zijn praktische bruikbaarheid en spelen er een partij schaak mee. Zij spelen volgens de regels van de wereldschaakbond FIDE. De enige extra spelregel is dat een geslagen schaakstuk opgegeten mag worden. Als de kerstman op zijn dagelijkse inspectieronde langskomt treft hij de volgende stelling aan, waarbij zwart aan zet is.



Op een van de velden ligt een vergulde chocoladedaalder. Verbaasd vraagt hij wat die dan wel mag betekenen. "Bombur heeft voor dat we begonnen zijn een schaakstuk opgepeuzeld, dus hebben we die maar vervangen door de chocoladedaalder," antwoordt Óin. "Toen naderhand de vervangende stukken geleverd werden, zijn we vergeten hem om te wisselen."

Welk stuk stelt de gouden chocoladedaalder voor? Opgemerkt dient te worden, dat elk stuk in aanmerking komt, behalve de koningen, omdat voor de vervanging voor elk ander schaakstuk een vervanger klaarstond.

Mogelijke antwoorden:

1. een witte dame
2. een zwarte dame
3. een witte toren
4. een zwarte toren
5. een witte loper
6. een zwarte loper
7. een wit paard

8. een zwart paard
9. een witte pion
10. een zwarte pion

Achtergrond:

De auteur van deze opgave, Erhard Zorn, is de bedenker van deze adventskalender. Tijdens zijn werkzaamheden voor Matheon heeft hij samen met Sabina Jeschke en Christine von Renesse de oerversie van deze wedstrijd voor studenten aan de technische hogeschool ontwikkeld.



Bonte Ballen

Auteur: Dirk Klindworth (TU Berlin)

1.1 Opgave

De kerstman heeft genoeg van die saaie effen kerstballen. Dit jaar moet het er overall veel bonter aan toe gaan. Daarom wil hij voor alle kerstbomen bonte ballen maken die in een grote verscheidenheid aan kleuren gaan fonkelen. Het ontbreekt hem echter nog aan de benodigde hoeveelheid verf. Maar als oude amateur bioloog komt hij met een fantastisch idee: de kleurrijke vleugels van de vlinders zijn niet zo kleurrijk omdat er veel verschillende verfpigmenten op gegroepeerd zijn maar omdat zij uit een materiaal vervaardigd zijn dat alleen het licht van bepaalde frequenties (d.w.z. kleuren) reflecteert. Omdat de knecht Foton met de massaproductie van deze zogenaamde fotonische kristallen al veel ervaring heeft opgedaan lijkt het probleem opgelost.

Nu hoeft de kerstman zich alleen nog maar te bekommeren om de kleurstelling van de kerstballen. Om te voorspellen welke kleuren gereflecteerd worden moeten zogenaamde dispersie krommen bekeken worden. Daarbij draait het om een functie van één veranderlijke die wij hier aangeven met $d(x)$. Bij deze dispersie kromme gaan het helaas niet om een gesloten formule zoals bijvoorbeeld $d(x) = x^2$, die de kerstman zou kunnen gebruiken. In plaats daarvan haalt hij er een maatje vanuit Matheon bij die met de berekening van dit soort functies ervaring heeft. Dat levert hem voor het interessante interval van 0 tot 2 echter slechts drie waarden op:

$$d(0) = 0, \quad d(1) = 1, \quad d(2) = 3.$$

De kerstman heeft echter de waarden van deze dispersie functie nodig voor het volledige interval $[0, 2]$. Daar komt gelukkig de elf Lin Eair om de hoek kijken en die stelt de kerstman voor om de drie waarden simpelweg stuksgewijs linear met elkaar te verbinden met twee lijnstukken. De kerstman heeft echter bij de wiskundeles opgelet en bedenkt dat wat de elf Lin Eair lineair kan, hij zelf kwadratisch kan en hij berekent een tweede-orde polymoom, d.w.z. een functie van de vorm $q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$ waarvan de waarden in de punten $x = 0$, $x = 1$ en $x = 2$ gelijk is aan de waarden van de dispersie functie $d(x)$. Als hij daarna de beide oplossingen aan zijn knecht Foton geeft, laat die het hoofd hangen: Äch, kerstman. We weten toch ook dat de stijging van de dispersie functie bij 0 gelijk is aan 0". Foton berekent dan snel een polynoom van orde drie, d.w.z. een functie van de vorm $k(x) = k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0$, die voldoet aan deze extra voorwaarde en daarnaast in de punten $x = 0$, $x = 1$ en $x = 2$ gelijk is aan de dispersie functie $d(x)$. Hoe groot is de maximale, absolute fout in het interval $[0, 2]$, die elf Lin Eair dan wel de kerstman heeft gemaakt als we aannemen dat de oplossing van knecht Foton correct is?

Hint:

- De extra voorwaarde die knecht Foton genoemd heeft is equivalent aan de conditie dat de afgeleide van de functie k in 0 gelijk is aan 0. De afgeleide van de functie k is hier gelijk aan

$$k'(x) = 3k_3x^2 + 2k_2x + k_1$$

Mogelijke antwoorden:

1. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{35-7\sqrt{13}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.
2. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{31-17\sqrt{13}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{8\sqrt{3}}$.
3. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{35-13\sqrt{13}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.

4. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{35-\sqrt{13}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{6\sqrt{5}}$.
5. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{31-7\sqrt{13}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.
6. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{35-13\sqrt{13}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{8\sqrt{5}}$.
7. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{35-13\sqrt{13}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{6\sqrt{5}}$.
8. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{37-19\sqrt{11}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{6\sqrt{5}}$.
9. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{31-13\sqrt{13}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.
10. maximale fout van de elf Lin Eair: $\frac{37-13\sqrt{13}}{54}$, maximale fout van de kerstman: $\frac{1}{5\sqrt{8}}$.

Verband met het project

Bij Matheon zijn wiskundigen actief bezig met het onderzoek naar fotonische kristallen en hun optische eigenschappen. Fotonische kristallen zijn transparante objecten waarvan de brekingsindex periodiek varieert. Deze periodieke brekingsindex heeft tot gevolg dat licht, afhankelijk van zijn frequentie, verschillend verstrooid dan wel gereflecteerd wordt.

In de natuur komen deze fotonische kristallen, zoals in deze opgave beschreven, voor in de vleugels van vlinders. Ook het bonte pluimage van een pauw en het glinsterend oppervlak van een opaal zijn op fotonische kristallen terug te voeren. Door mensenhand geproduceerde fotonische kristallen vinden in het bijzonder in de telecommunicatie een toepassing. Met behulp hiervan kunnen effectieve geleiders van licht geproduceerd worden. Hier worden in het bijzonder twee-dimensionale fotonische kristallen toegepast. Dat zijn objecten die, door het etsen van periodiek verdeelde gaten in een oppervlak, de gewenste optische eigenschappen verkrijgen. Om deze optische eigenschappen te beschrijven worden de in deze opgave beschreven dispersie krommen gebruikt. Wiskundig gesproken wordt elk punt van deze kromme bepaald door een eigenwaarde probleem geassocieerd met een partiële differentiaalvergelijking. Voor zeer eenvoudige fotonische kristallen kunnen punten op deze kromme snel bepaald worden en kunnen we dus ook de kromme snel en nauwkeurig bepalen. Maar vaak is deze aanpak niet mogelijk omdat dit te lang gaat duren. Nieuw onderzoek van het Matheon laat zien dat we relatief weinig punten hoeven te bepalen door gebruik te maken van addionele eigenschappen van onder andere de afgeleide van deze functie. Naast andere technieken wordt hier interpolatie gebruikt: het vinden van een polynoom waarvan de waarde in bepaalde punten bekend is en waarvan eventueel ook de waarde van de afgeleide in specifieke punten bekend is. Interpolatie speelt in vele andere toepassingsgebieden ook een rol. Als discrete waarden zoals waarnemingen van een continue en differentieerbare functie samengevoegd moeten worden dan is interpolatie de standaard techniek.



Kabelbaan kampioenschappen

Auteur:

Heide Hoppmann (Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin),
Marika Karbstein (Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin)

1.1 Opgave

Dit jaar vindt voor de tiende keer de "Kabelbaan kampioenschappen" plaats. Bij deze wedstrijd proberen de deelnemers zo snel mogelijk met de kabouterkabelbaan alle stukken van het kabelbaan netwerk af te leggen. Voor de winnaar is er, zoals elk jaar, weer een jaarvoorraad aan zoete knabbels te winnen. Omdat de kabouters echter door de zoetigheden in de afgelopen tijd al aardig traag zijn geworden, heeft de kerstman een additionele prijs beloofd, om zijn kabouters weer fit te krijgen. Iedereen die het record, dat staat op 83 minuten, met minstens vijf minuten verbetert krijgt een dag vrij.

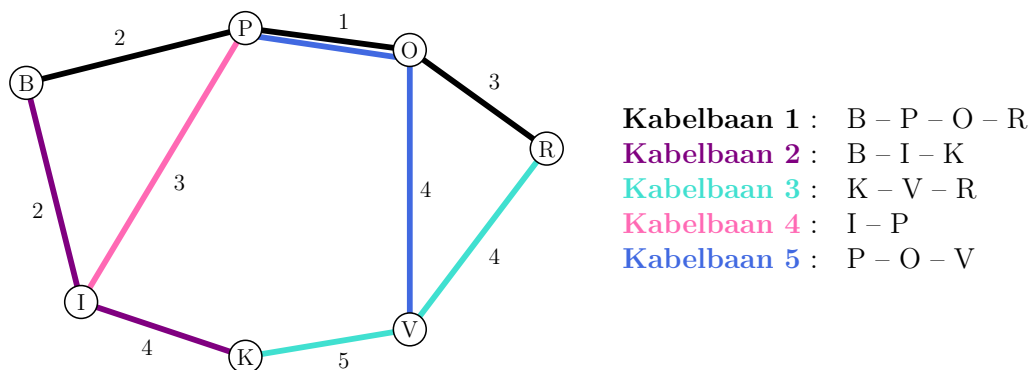
Voor de kabelbaan kampioenschappen gelden dit jaar de volgende regels:

1. Alle deelnemers moeten hun route bij het station *Productiehal* beginnen en eindigen. Alle deelnemers beginnen gezamenlijk met kabelbaan 1 richting *Koekjesbakkerij*.
2. Omdat met kabelbaan 5 net de pakjes uit de opslag naar het verpakkingscentrum gebracht worden mogen de deelnemers tussen *Opslag* en *Verpakkingscentrum* alleen in de richting van de *Opslag* rijden.
3. De deelnemers moeten alle 9 deelstukken minstens één keer afleggen. Het maakt niet uit welke kabelbaan ze daarvoor gebruiken. Met uitzondering van het stuk *Verpakkingscentrum* – *Opslag* zijn beide richtingen mogelijk. Maar als een deelnemer een stuk meerdere keren wil afleg-

gen dan mag dat alleen in *dezelfde* richting. Elke deelnemer mag zelf bepalen welke richting hij kiest voor elk deelstuk maar voor het stuk *Productiehal – Koekjesbakkerij* en *Verpakkingscentrum – Opslag* is de richting al vastgesteld (zie 1. en 2.).

4. Het overstappen op een station naar een andere kabelbaan kost precies 5 minuten.

Het kabelbaanennetwerk met zijn 5 kabelbanen is in het volgende plaatje weer-gegeven. De tijdsduur van een elk stuk wordt steeds in minuten aangegeven en is in beide richtingen gelijk.



B = Koekjesbakkerij, P = Productiehal, O = Opslag, R = Rendierstal
V = Verpakkingscentrum, K = Kaartendrukkerij, I = Ideeensmederij

Vorig jaar heeft Hubertus gewonnen en het huidige record opgesteld. Omdat hij gelooft dat het hem geluk brengt wil hij met kabelbaan 2 het stuk K – I van de kaartendrukkerij naar de ideeensmederij afleggen. Leopold heeft het kabelnetwerk uitvoerig bestudeert en besluit om van het verpakkingscentrum in de richting van de rendierstallen te gaan (d.w.z. van V naar R). Welke van de volgende uitspraken is correct?

Mogelijke antwoorden:

1. Er is een route waarvoor men slechts 58 minuten nodig heeft.
2. Hubertus moet minimaal 10 keer overstappen en minstens 3 keer bij de ideeensmederij langskomen.
3. Er is een route waarbij men elk stuk precies één keer aflegt.
4. Als beide voor een optimale route kiezen komt Hubertus voor Leopold als eerste langs de rendierstal maar is Leopold voor Hubertus klaar met zijn route.
5. Hubertus kan zijn record van vorig jaar verbeteren maar krijgt geen dag vrij.
6. Leopold moet minimaal 9 keer overstappen.
7. Er is een route waarbij men slechts 5 keer hoeft over te stappen
8. Leopold moet in ieder geval vaker overstappen als Hubertus.
9. Hubertus zal dit jaar in ieder geval meer tijd nodig hebben vergeleken met vorig jaar.
10. Welke richting Leopold ook kiest tussen de productiehal en de ideeensmederij, hij kan nog altijd voor Hubertus zijn route beëindigen.

Beschrijving van het project

In het MATHEON Project B-MI3 - Infrastructure design and passenger behaviour in public transport - wordt het gedrag van passagiers ten aanzien van de gekozen route geanalyseerd om efficiënte en gebruikersvriendelijke dienstregelingen op te stellen. Een goede modellering van de overstaptijden is hierbij de belangrijkste uitdaging. In de opgave worden de overstaptijden, als vereenvoudiging, geschat.



Op zoek naar de verborgen geschenken

Auteur: Andreas Filler (HU Berlin)

Opgave

De Kerstman is het hele jaar bezig met cadeaus verzamelen voor Kerst. Maar waar laat hij die tot het zo ver is? Hij verstopt ze op heel veel verschillende plekken, en met Kerst helpen de kabouters hem, de cadeaus weer op te graven en bijeen te brengen.

Eén kist met cadeaus begraaft de Kerstman in een bosje dat grenst aan een open plek in het bos. Aan de rand van die open plek staan duidelijk zichtbaar een enorme eik en een uit de kluiten gewassen berk. Opdat wandelaars de kist niet vinden, mag de Kerstman de plek waar hij de kist begraaft niet markeren. In plaats daarvan onthoudt hij de plek nauwkeurig, loopt de open plek op, en plant daar een den, die hij voor de zekerheid nog met een rode kerstbal versiert. Vervolgens noteert hij volgende routebeschrijving in zijn schrift:

Loop over de open plek van de den naar de eik en tel je passen. Draai over een hoek van 90° naar rechts en loop nogmaals net zoveel passen als van de den naar de eik. Steek een stok in de grond.

Ga terug naar de den en loop nu naar de berk, en tel wederom je passen. Draai 90° naar links en loop net zoveel passen als van de den naar de berk. Steek een stok in de grond.

De kist met cadeaus is begraven op de plek precies in het midden tussen de beide stokken.

Drie dagen voor Kerst geeft de Kerstman zijn routebeschrijving aan de kabouters. Zij moeten de kist met cadeaus vinden en naar de Kerstman brengen.

De kabouters komen op de open plek en zien meteen de eik en de berk staan. Maar hoe ze ook zoeken, ze vinden geen den—waarschijnlijk is die met kerstbal en al opgegeten door de reeën.

Kunnen de kabouters, zonder de positie van de den te kennen, met behulp van de wegbeschrijving van de Kerstman de kist met kerstcadeaus toch vinden? Zo ja: waar is die kist dan?

Mogelijke antwoorden (we schrijven E voor het punt waar de eik staat en B voor het punt waar de berk staat; en met *links* van het lijnstuk $\overline{EB}$ bedoelen we *aan je linkerhand als je van E naar B loopt*):

1. Ja, ze kunnen de kist vinden. De kist ligt begraven op het derde hoekpunt van de gelijkzijdige driehoek met hoekpunten E en B links van het lijnstuk $\overline{EB}$.
2. Ja, ze kunnen de kist vinden. Ze lopen vanaf de eik loodrecht op de lijn EB aan de linkerkant van die lijn het bosje in tot de volgende open plek en markeren het punt waar ze het bosje verlaten met E' . Net zo lopen ze vanuit de berk loodrecht op EB links het bos in tot het einde van het bos en markeren het bereikte punt met B' . Nu trekken ze de diagonalen van de vierhoek $EBB'E'$. Op het snijpunt van de diagonalen is de kist begraven.
3. Je, ze kunnen de kist vinden. Daartoe bepalen ze het middelpunt M van het lijnstuk $\overline{EB}$ en lopen daarvandaan loodrecht op dit lijnstuk (weer naar links) het bos in. Zodra ze vanuit M net zover gelopen zijn als de lengte van $\overline{EB}$, zijn ze bij de begraafplaats van de kist.
4. Ja, ze kunnen de kist vinden. Daartoe bepalen ze het middelpunt M van het lijnstuk $\overline{EB}$ en lopen daarvandaan loodrecht op dit lijnstuk (weer naar links) het bos in. Zodra ze vanuit M een afstand half zo lang als het lijnstuk $\overline{EB}$ hebben afgelegd, zijn ze bij de begraafplaats van de kist.

5. Ja, ze kunnen de kist vinden, maar daartoe moeten ze een wortel trekken. Vanuit M lopen ze (weer naar links) loodrecht op $\overline{EB}$ het bos in. Zodra ze vanuit M een afstand hebben afgelegd die $\frac{\sqrt{3}}{2}$ keer de lengte van $\overline{EB}$ is, zijn ze bij de begraafplaats van de kist.
6. Ja, ze kunnen de kist vinden, maar het is niet eenvoudig. Met behulp van de stelling van Thales en de ABC-formule construeren ze de wortel uit de lengte van lijnstuk $\overline{EB}$. Dan tekenen ze met een touw cirkels om E en B met straal gelijk aan die wortel. Op het snijpunt van die cirkels dat **niet** in het bos ligt, is de kist begraven.
7. De kist kan niet meer worden gevonden. Hij kan overal in het bos begraven zijn.
8. De kist kan niet meer worden gevonden. Hij ligt weliswaar op de middelloodlijn van lijnstuk $\overline{EB}$ (nog preciezer: aan de linkerkant van dat lijnstuk, en in het bos), maar de precieze plek kan niet bepaald worden.
9. Ja, ze kunnen de kist vinden. Daartoe tekenen ze een ellips met brandpunten E en B waarvan de langste as twee keer zo lang is als het lijnstuk $\overline{EB}$. De middelloodlijn van $\overline{EB}$ snijdt deze ellips in twee punten, en de kist is op het snijpunt links van dat lijnstuk begraven.
10. Ja, ze kunnen de kist vinden. Daartoe tekenen ze een ellips met brandpunten E en B waarvan de langste as anderhalf keer zo lang is als het lijnstuk $\overline{EB}$. De middelloodlijn van $\overline{EB}$ snijdt deze ellips in twee punten, en de kist is op het snijpunt links van dat lijnstuk begraven.