

Can one hear the shape of several drums?

Jan van Neerven,
Inter TU studiedag 2016

“Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.



V.I. Arnol'd

V.I. Arnol'd, “On teaching mathematics”

“Mathematics is the part of physics where experiments are cheap.

“To the question

‘what is $2 + 3$ ’

a French primary school pupil replied:

‘ $3 + 2$, since addition is commutative.’



V.I. Arnol'd

V.I. Arnol'd, “On teaching mathematics”

Het onderwerp van deze voordracht is een fraai voorbeeld van:

COMMUNICATIONS ON PURE AND APPLIED MATHEMATICS, VOL. XIII, 001-14 (1960)

The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences

Richard Courant Lecture in Mathematical Sciences delivered at New York University,
May 11, 1959

EUGENE P. WIGNER

Princeton University

De Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ duikt overal op:

De Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ duikt overal op:



diffusievergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

De Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ duikt overal op:



diffusievergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$



vloeistofmechanica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u \cdot \nabla)u$$

De Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ duikt overall op:



diffusievergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$



vloeistofmechanica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u \cdot \nabla)u$$



golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

De Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ duikt overall op:



diffusievergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$



vloeistofmechanica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u \cdot \nabla)u$$



golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

Reden?

De Laplace operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ duikt overal op:



diffusievergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$



vloeistofmechanica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u \cdot \nabla)u$$



golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

Reden? Symmetrie! De Laplace operator is (in zekere zin) de enige translatie- en rotatie-invariante lineaire operator op $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Het verband tussen de **golfvergelijking** en **muziek** werd al opgemerkt door **Pythagoras** (ca. 570-495 v.Chr.)

"Alles is getal"



Pythagoras (volgens Rafael: "De Atheense School")

Pythagoras ontdekte het verband tussen trillingsfrequenties en toonhoogten:

Harmonieuze intervallen = geheeltallige frequentieverhoudingen



Frequenties van een object D



Eigenwaarden van $-\Delta$ op D

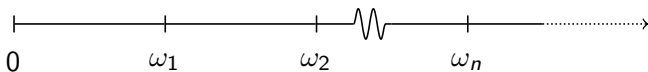
Frequenties van een object D



Eigenwaarden van $-\Delta$ op D

Stelling: *De Laplace operator heeft een discrete rij eigenwaarden.*

Gevolg: *Ieder object heeft een discrete rij frequenties ω_n :*



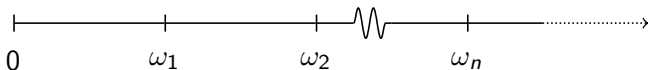
Frequenties van een object D



Eigenwaarden van $-\Delta$ op D

Stelling: *De Laplace operator heeft een discrete rij eigenwaarden.*

Gevolg: *Ieder object heeft een discrete rij frequenties ω_n :*



Voorbeeld: Voor een snaar geldt $\omega_n = n$

Voorbeeld: Een rond membraan

mode 01
 $\omega = 2.40483$

Voorbeeld: Een rond membraan

mode 02
 $\omega = 5.52008$

Voorbeeld: Een rond membraan

mode 11
 $\omega = 3.83171$

Voorbeeld: Een rond membraan

$$\text{mode 12}$$
$$\omega = 7.01559$$

Voorbeeld: Een rond membraan

mode 21

Voorbeeld: Een rond membraan

mode 22

Voorbeeld: Een rond membraan

mode 31

Voorbeeld: Een rond membraan

mode 32

Voorbeeld: Een rond membraan

mode 41

Voorbeeld: Een rond membraan

mode 51

Dit leidt tot een interessant wiskundig probleem:
(Mark Kac, 1966):

"Can one hear the shape of a drum?"



Dit leidt tot een interessant wiskundig probleem:
(Mark Kac, 1966):

"Can one hear the shape of a drum?"

Oftewel:

*Karakteriseren de frequenties het
object?*



Dit leidt tot een interessant wiskundig probleem:
(Mark Kac, 1966):

"Can one hear the shape of a drum?"

Oftewel:

*Karakteriseren de frequenties het
object?*

Wiskundig uitgedrukt:

Volgt uit

$$\sigma(-\Delta_{D_1}) = \sigma(-\Delta_{D_2})$$

dat D_1 en D_2 congruent zijn?



Gegeven een begrensd gebied D in $\mathbb{R}^n$, zij $\sigma(-\Delta_D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, geordend volgens

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Gegeven een begrensd gebied D in $\mathbb{R}^n$, zij $\sigma(-\Delta_D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, geordend volgens

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Laten we eens kijken naar $N(\lambda) := \#\{n \geq 1 : \lambda_n < \lambda\}$.

Voorbeeld: De kubus $Q = [0, a] \times [0, b]$ in $\mathbb{R}^2$.

Gegeven een begrensd gebied D in $\mathbb{R}^n$, zij $\sigma(-\Delta_D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, geordend volgens

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Laten we eens kijken naar $N(\lambda) := \#\{n \geq 1 : \lambda_n < \lambda\}$.

Voorbeeld: De kubus $Q = [0, a] \times [0, b]$ in $\mathbb{R}^2$.

Eigenfuncties:

$$\phi_{j,k}(x, y) = \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$$

met eigenwaarden

$$\lambda_{j,k} = \left(\frac{j\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 \quad (j, k \in \mathbb{N})$$

Gegeven een begrensd gebied D in $\mathbb{R}^n$, zij $\sigma(-\Delta_D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, geordend volgens

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Laten we eens kijken naar $N(\lambda) := \#\{n \geq 1 : \lambda_n < \lambda\}$.

Voorbeeld: De kubus $Q = [0, a] \times [0, b]$ in $\mathbb{R}^2$.

Eigenfuncties:

$$\phi_{j,k}(x, y) = \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$$

met eigenwaarden

$$\lambda_{j,k} = \left(\frac{j\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 \quad (j, k \in \mathbb{N})$$

$$\therefore N(\lambda) = \#\{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ binnen de ellips } \left(\frac{\pi}{a}x\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}y\right)^2 \leq \lambda\}$$

Gegeven een begrensd gebied D in $\mathbb{R}^n$, zij $\sigma(-\Delta_D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, geordend volgens

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Laten we eens kijken naar $N(\lambda) := \#\{n \geq 1 : \lambda_n < \lambda\}$.

Voorbeeld: De kubus $Q = [0, a] \times [0, b]$ in $\mathbb{R}^2$.

Eigenfuncties:

$$\phi_{j,k}(x, y) = \sin\left(\frac{j\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{k\pi}{b}y\right)$$

met eigenwaarden

$$\lambda_{j,k} = \left(\frac{j\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 \quad (j, k \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} \therefore N(\lambda) &= \#\{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ binnen de ellips } (\tfrac{\pi}{a}x)^2 + (\tfrac{\pi}{b}y)^2 \leq \lambda\} \\ &\leq \frac{1}{4}\pi \frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi} = \frac{A(Q)}{4\pi} \lambda. \end{aligned}$$

In 1912 bewees Hermann Weyl:

Stelling (Weyl) *In d dimensies geldt*

$$A(D) = \frac{(2\pi)^d}{\omega_d} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{d/2}}$$

met ω_d het volume van de eenheidsbol.



Hermann Weyl

In 1912 bewees Hermann Weyl:

Stelling (Weyl) *In d dimensies geldt*

$$A(D) = \frac{(2\pi)^d}{\omega_d} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda^{d/2}}$$

met ω_d het volume van de eenheidsbol.

Met andere woorden:

One can hear the area of a drum!



Hermann Weyl

Stelling van Weyl, schets van het bewijs:

- *Minimax lemma:* De n -de eigenwaarde wordt gegeven door de formule

$$\lambda_n = \inf_{\dim(U)=n} \left(\sup_{u \in U} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2}{\|u\|_{L^2(D)}^2} \right)$$

waarbij het supremum wordt genomen over alle deelruimten U van $H_0^1(D)$ met $\dim(U) = n$.

De observatie die schuilgaat achter deze mysterieuze formule is vrij eenvoudig:

- (i) De eigenvectoren u_n vormen een orthonale basis voor $L^2(D)$;
- (ii) Via partiële integratie zien we dat

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 &= \int_D \nabla u \cdot \nabla u = - \int_D \Delta u \cdot u \\ &= \left(-\Delta \sum_{j=1}^{\infty} (u|u_j), u \right) = \left(-\Delta \sum_{j=1}^{\infty} (u|u_j), u \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(u|u_j)|^2.\end{aligned}$$

De observatie die schuilgaat achter deze mysterieuze formule is vrij eenvoudig:

- (i) De eigenvectoren u_n vormen een orthonale basis voor $L^2(D)$;
- (ii) Via partiële integratie zien we dat

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 &= \int_D \nabla u \cdot \nabla u = - \int_D \Delta u \cdot u \\ &= \left(-\Delta \sum_{j=1}^{\infty} (u|u_j), u \right) = \left(-\Delta \sum_{j=1}^{\infty} (u|u_j), u \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(u|u_j)|^2.\end{aligned}$$

- (iii) Als $u \perp u_1, \dots, u_{n-1}$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(u|u_j)|^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j |(u|u_j)|^2 \geq \lambda_n \sum_{j=n}^{\infty} |(u|u_j)|^2 = \lambda_n \sum_{j=1}^{\infty} |(u|u_j)|^2 = \lambda_n \|u\|_{L^2(D)}^2.$$

De observatie die schuilgaat achter deze mysterieuze formule is vrij eenvoudig:

- (i) De eigenvectoren u_n vormen een orthonale basis voor $L^2(D)$;
- (ii) Via partiële integratie zien we dat

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2 &= \int_D \nabla u \cdot \nabla u = - \int_D \Delta u \cdot u \\ &= \left(-\Delta \sum_{j=1}^{\infty} (u|u_j), u \right) = \left(-\Delta \sum_{j=1}^{\infty} (u|u_j), u \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(u|u_j)|^2.\end{aligned}$$

- (iii) Als $u \perp u_1, \dots, u_{n-1}$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |(u|u_j)|^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j |(u|u_j)|^2 \geq \lambda_n \sum_{j=n}^{\infty} |(u|u_j)|^2 = \lambda_n \sum_{j=1}^{\infty} |(u|u_j)|^2 = \lambda_n \|u\|_{L^2(D)}^2.$$

Hieruit volgt het minimax lemma gemakkelijk:

- ' $\leq$ ': iedere n -dimensionale U bevat een vector $u \neq 0$ met $u \perp u_1, \dots, u_{n-1}$;
- ' $\geq$ ': neem een n -dimensionale U die u_n bevat.

Stelling van Weyl, schets van het bewijs:

- *Minimax lemma*: De n -de eigenwaarde wordt gegeven door de formule

$$\lambda_n = \inf_{\dim(U)=n} \left(\sup_{u \in U} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2}{\|u\|_{L^2(D)}^2} \right)$$

waarbij het supremum wordt genomen over alle deelruimten U van $H_0^1(D)$ met $\dim(U) = n$.

Stelling van Weyl, schets van het bewijs:

- *Minimax lemma*: De n -de eigenwaarde wordt gegeven door de formule

$$\lambda_n = \inf_{\dim(U)=n} \left(\sup_{u \in U} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2}{\|u\|_{L^2(D)}^2} \right)$$

waarbij het supremum wordt genomen over alle deelruimten U van $H_0^1(D)$ met $\dim(U) = n$.

- Er geldt $D' \subseteq D \implies \lambda_n \leq \lambda'_n$ wegens $H_0^1(D') \subseteq H_0^1(D)$.

Stelling van Weyl, schets van het bewijs:

- *Minimax lemma*: De n -de eigenwaarde wordt gegeven door de formule

$$\lambda_n = \inf_{\dim(U)=n} \left(\sup_{u \in U} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2}{\|u\|_{L^2(D)}^2} \right)$$

waarbij het supremum wordt genomen over alle deelruimten U van $H_0^1(D)$ met $\dim(U) = n$.

- Er geldt $D' \subseteq D \implies \lambda_n \leq \lambda'_n$ wegens $H_0^1(D') \subseteq H_0^1(D)$.
- Weyl geldt voor kubussen.

Stelling van Weyl, schets van het bewijs:

- *Minimax lemma*: De n -de eigenwaarde wordt gegeven door de formule

$$\lambda_n = \inf_{\dim(U)=n} \left(\sup_{u \in U} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2}{\|u\|_{L^2(D)}^2} \right)$$

waarbij het supremum wordt genomen over alle deelruimten U van $H_0^1(D)$ met $\dim(U) = n$.

- Er geldt $D' \subseteq D \implies \lambda_n \leq \lambda'_n$ wegens $H_0^1(D') \subseteq H_0^1(D)$.
- Weyl geldt voor kubussen.
- Weyl geldt voor eindige verenigingen van kubussen.

Stelling van Weyl, schets van het bewijs:

- *Minimax lemma*: De n -de eigenwaarde wordt gegeven door de formule

$$\lambda_n = \inf_{\dim(U)=n} \left(\sup_{u \in U} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(D)}^2}{\|u\|_{L^2(D)}^2} \right)$$

waarbij het supremum wordt genomen over alle deelruimten U van $H_0^1(D)$ met $\dim(U) = n$.

- Er geldt $D' \subseteq D \implies \lambda_n \leq \lambda'_n$ wegens $H_0^1(D') \subseteq H_0^1(D)$.
- Weyl geldt voor kubussen.
- Weyl geldt voor eindige verenigingen van kubussen.
- Benader D met eindige verenigingen van kubussen.

Terug naar de kubus $Q = [0, a] \times [0, b]$

Herinner de bovengrens $N(\lambda) \leq \frac{1}{4} \pi \frac{\sqrt{\lambda} a}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda} b}{\pi}$.

Terug naar de kubus $Q = [0, a] \times [0, b]$

Herinner de bovengrens $N(\lambda) \leq \frac{1}{4}\pi \frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi}$.

Als we de ellips één unit naar links en één unit naar beneden verschuiven krijgen we de ondergrens

$$N(\lambda) \geq \frac{1}{4}\pi \frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi} - \frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi} - \frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi}$$

Terug naar de kubus $Q = [0, a] \times [0, b]$

Herinner de bovengrens $N(\lambda) \leq \frac{1}{4}\pi \frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi}$.

Als we de ellips één unit naar links en één unit naar beneden verschuiven krijgen we de ondergrens

$$\begin{aligned} N(\lambda) &\geq \frac{1}{4}\pi \frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi} \frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi} - \frac{\sqrt{\lambda}a}{\pi} - \frac{\sqrt{\lambda}b}{\pi} \\ &= \frac{A(Q)}{4\pi} \lambda - \frac{L(Q)}{2\pi} \sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

(met A = oppervlak, L = omtrek).

Ake Pleijel bewees in 1954:

Stelling. Voor een domein $D \subseteq \mathbb{R}^2$ met gladde rand geldt, als $\lambda \rightarrow \infty$:

$$N(\lambda) = \frac{A(D)}{4\pi} \lambda - \frac{L(D)}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(1)$$

Ake Pleijel bewees in 1954:

Stelling. Voor een domein $D \subseteq \mathbb{R}^2$ met gladde rand geldt, als $\lambda \rightarrow \infty$:

$$N(\lambda) = \frac{A(D)}{4\pi} \lambda - \frac{L(D)}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(1)$$

Met andere woorden:

One can hear the circumference of a drum

Ake Pleijel bewees in 1954:

Stelling. Voor een domein $D \subseteq \mathbb{R}^2$ met gladde rand geldt, als $\lambda \rightarrow \infty$:

$$N(\lambda) = \frac{A(D)}{4\pi} \lambda - \frac{L(D)}{4\pi} \sqrt{\lambda} + O(1)$$

Met andere woorden:

One can hear the circumference of a drum

In combinatie met de isoperimetrische ongelijkheid $L^2 \geq 4\pi A$ volgt ook:

One can hear whether a drum is circular

Het blijkt makkelijker de eigenwaarden te 'tellen' aan de hand van de warmtehalfgroep $e^{-t\Delta}$:

Voor $t \downarrow 0$ geldt de spoorformule

$$\mathrm{tr}(e^{-t\Delta_D}) = \frac{A(D)}{4\pi t} - \frac{\frac{1}{4}L(B)}{\sqrt{4\pi t}} + O(1).$$

Dit is slechts een topje van de ijsberg!

Tal van diepe verbanden met andere delen van de wiskunde.

Mark Kac gaf in 1966 een heuristisch argument voor de formule:

Stelling. Voor $D \subseteq \mathbb{R}^2$ samenhangend met gladde rand geldt, als $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\mathrm{tr}(e^{-t\Delta_D}) = \frac{A(D)}{4\pi t} - \frac{\frac{1}{4}L(B)}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{1}{6}(1 - g) + o(1)$$

met g het aantal gaten in D .

Een bewijs werd in 1967 gevonden door McKean en Singer.

Mark Kac gaf in 1966 een heuristisch argument voor de formule:

Stelling. Voor $D \subseteq \mathbb{R}^2$ samenhangend met gladde rand geldt, als $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\mathrm{tr}(e^{-t\Delta_D}) = \frac{A(D)}{4\pi t} - \frac{\frac{1}{4}L(B)}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{1}{6}(1 - g) + o(1)$$

met g het aantal gaten in D .

Een bewijs werd in 1967 gevonden door McKean en Singer.

One can hear the number of holes in a drum

Mark Kac gaf in 1966 een heuristisch argument voor de formule:

Stelling. Voor $D \subseteq \mathbb{R}^2$ samenhangend met gladde rand geldt, als $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\mathrm{tr}(e^{-t\Delta_D}) = \frac{A(D)}{4\pi t} - \frac{\frac{1}{4}L(B)}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{1}{6}(1 - g) + o(1)$$

met g het aantal gaten in D .

Een bewijs werd in 1967 gevonden door McKean en Singer.

One can hear the number of holes in a drum

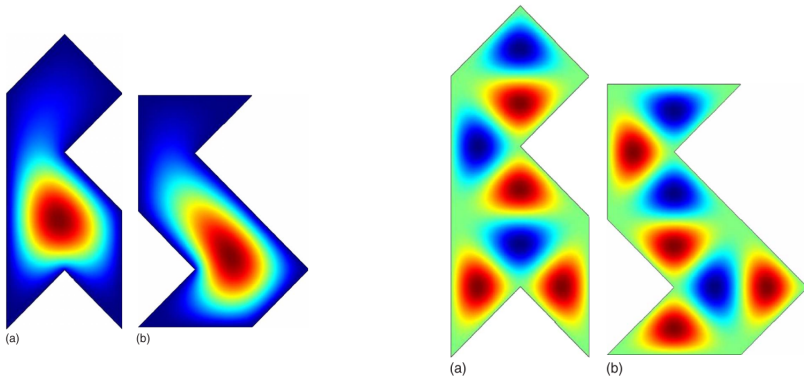
Voor domeinen met hoeken draagt iedere hoek een extra factor bij.

Carolyn Gordon, David Webb en Scott Wolpert (1992):

One cannot hear the shape of a drum!

Carolyn Gordon, David Webb en Scott Wolpert (1992):

One cannot hear the shape of a drum!



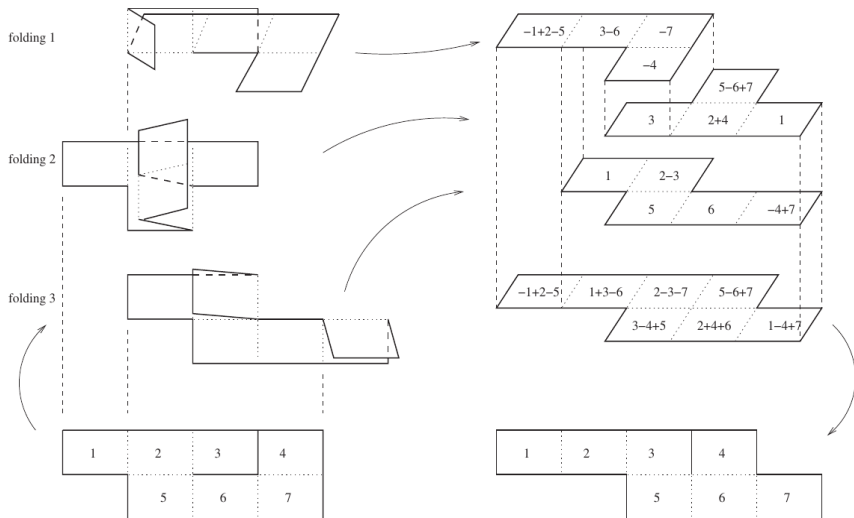
Twee niet-congruente isospectrale gebieden

Nog een voorbeeld:

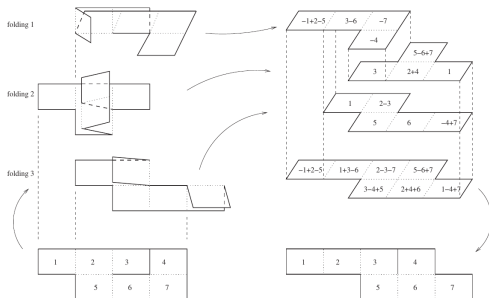
1	2	3	4
	5	6	7

1	2	3	4	
		5	6	7

Bewijs van isospectraliteit via 'paper folding':

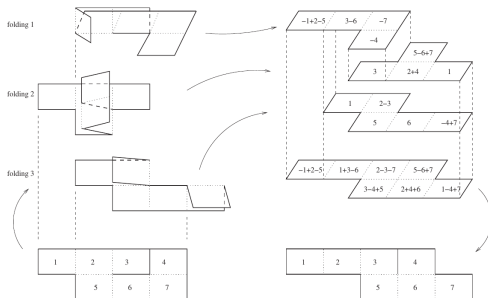


Bewijs van isospectraliteit via 'paper folding':



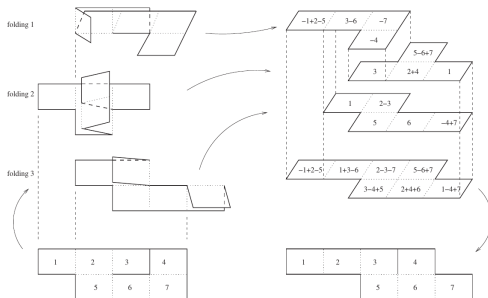
- Gegeven een eigenfunctie $\Delta\phi = \lambda\phi$ voor gebied 1 construeren we een eigenfunctie $\Delta\psi = \lambda\psi$ voor gebied 2 door plakken en knippen

Bewijs van isospectraliteit via 'paper folding':



- ▶ Gegeven een eigenfunctie $\Delta\phi = \lambda\phi$ voor gebied 1 construeren we een eigenfunctie $\Delta\psi = \lambda\psi$ voor gebied 2 door plakken en knippen
- ▶ Bijvoorbeeld: $\psi|_{\text{tegel } 1} := -\phi|_{\text{tegel } 1} + \phi|_{\text{tegel } 2} - \phi|_{\text{tegel } 4}$

Bewijs van isospectraliteit via 'paper folding':



- ▶ Gegeven een eigenfunctie $\Delta\phi = \lambda\phi$ voor gebied 1 construeren we een eigenfunctie $\Delta\psi = \lambda\psi$ voor gebied 2 door plakken en knippen
- ▶ Bijvoorbeeld: $\psi|_{\text{tegel } 1} := -\phi|_{\text{tegel } 1} + \phi|_{\text{tegel } 2} - \phi|_{\text{tegel } 4}$
- ▶ $\implies \Delta\psi = \lambda\psi$ op het inwendige van iedere tegel (want: idem dito voor ϕ ;
 $\Delta\psi = 0$ op de rand van gebied 2 (want: cancelling op de vouwen).

Steve Zelditch (2009):

One can hear the shape of a drum

wanneer die:

- een gladde rand heeft,
- convex is,
- en een symmetrie-as bezit.



Steve Zelditch

Tot slot: Can one hear the shape of several drums? Play

Tot slot: **Can one hear the shape of several drums?** Play

A.k.a. **Cocktail Party Problem:** *Is het mogelijk reconstrueren wat iedereen zegt uit het geroezemoes op een cocktailparty?*



Wiskundige formulering:

Een *frame* in een Hilbertruimte H is een verzameling $(f_i)_{i \in I}$ met de eigenschap dat voor alle $f \in H$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |(f|f_i)|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Gegeven een frame $(f_i)_{i \in I}$, is het mogelijk om f te reconstrueren uit de absolute waarden $|(f|f_i)|$ van de coëfficiënten van f ?

Wiskundige formulering:

Een *frame* in een Hilbertruimte H is een verzameling $(f_i)_{i \in I}$ met de eigenschap dat voor alle $f \in H$

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} |(f|f_i)|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Gegeven een frame $(f_i)_{i \in I}$, is het mogelijk om f te reconstrueren uit de absolute waarden $|(f|f_i)|$ van de coëfficiënten van f ?

N.B.: *Fourieranalyse* laat zien hoe f uit de coëfficiënten $(f|f_i)$ gereconstrueerd kan worden.

Met behulp van methoden uit de *algebraïsche meetkunde* bewezen
Balan, Casazza, Edidin in 2006:

Stelling. *Voor een generiek frame met minstens $2n - 1$ elementen in een n -dimensionale Hilbertruimte is*

$$\pm f \mapsto \{|(f|f_i)|\}_{i \in I}$$

bijjectief.

Met behulp van methoden uit de *algebraïsche meetkunde* bewezen
Balan, Casazza, Edidin in 2006:

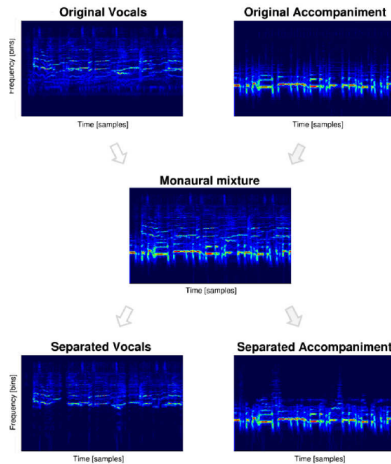
Stelling. *Voor een generiek frame met minstens $2n - 1$ elementen in een n -dimensionale Hilbertruimte is*

$$\pm f \mapsto \{|(f|f_i)|\}_{i \in I}$$

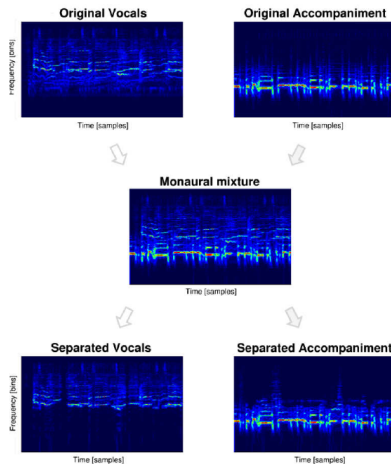
bijjectief.

Het cocktail party probleem heeft diepe verbanden met het in 2013 opgeloste **Kadison-Singer probleem** uit de kwantummechanica.

Ondertussen, in de **deep karaoke** community:



Ondertussen, in de **deep karaoke** community:



Let dus op wat u zegt over deze voordracht tijdens de borrel!

Literatuur:

- ▶ W. Arendt, R. Nittka, W. Peter, F. Steiner, Weyl's law: spectral properties of the Laplacian in mathematics and physics, in: Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity (2009), 1-71.
- ▶ R. Balan, P. Casazza, D. Edidin, On signal reconstruction without phase, Appl. Comput. Harm. Anal. 20 (2006), 345-356.
- ▶ O. Giraud, K. Thas, Hearing shapes of drums: mathematical and physical aspects of isospectrality, Rev. Mod. Phys. 82 (2010), 2213-2255.
- ▶ C. Gordon, D.L. Webb, and S. Wolpert, One cannot hear the shape of a drum, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 134-138.
- ▶ Kac, Mark. Can one hear the shape of a drum?, Amer. Math. Monthly 73 (1966), 1-23.
- ▶ H. Weyl, Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte, Nachr. Gesellschaft Wissensch. Göttingen, Math.-Phys. Klasse (1911), 110-117.
- ▶ S. Zelditch, Inverse spectral problem for analytic domains. II. $\mathbb{Z}_2$ -symmetric domains, Ann. of Math. 170 (2009), 205-269.



Dank voor uw aandacht!