Voetbaltoernooi

Hennie ter Morsche (TU Eindhoven;
Gerhard Woeginger (RWTH Aachen)

Opgave

De vier voetbalteams van de steden Icetown, Frostville, Glacierhampton en Coildburry hebben deelgenomen aan een internationaal Kersttoernooi. In dit toernooi speelt elk team éénmaal tegen ieder een ander team. Een team behaalt bij winst (W) 3 punten, bij een gelijkspel (D) 1 punt en bij verlies (L) geen enkel punt. Alle zes wedstrijden hebben een verschillende uitslag. Als bijvoorbeeld een wedstrijd eindigt in 3:2 dan komt bij de andere wedstijden de uitslag 3:2 of 2:3 niet voor. De gescoorde punten en de voor- en tegendoelpunten van de teams zijn verwerkt in de volgende tabel.

Team	W	D	L	Goals	Points
Icetown	2	0	1	5 : 1	6
Frostville	2	0	1	3 : 5	6
Glacierhampton	1	0	2	5 : 6	3
Coldbury	1	0	2	4 : 5	3

Welke van de volgende uitspraken is waar?

1. Coldbury heeft de wedstrijd tegen Glacierhampton gewonnen met 1:0.
2. Coldbury verloor de wedstrijd tegen Glacierhampton met 0:1.
3. Coldbury heeft de wedstrijd tegen Glacierhampton gewonnen met 2:0.
4. Coldbury verloor de wedstrijd tegen Glacierhampton met 0:2.
5. Coldbury heeft de wedstrijd tegen Glacierhampton gewonen met 3:0.
6. Coldbury verloor de wedstrijd tegen Glacierhampton met 0:3.
7. Coldbury heeft de wedstrijd tegen Glacierhampton gewonnen met 2:1.
8. Coldbury verloor de wedstrijd tegen Glacierhampton met 1:2.
9. Coldbury heeft de wedstrijd tegen Glacierhampton gewonnen met 3:1.
10. Coldbury verloor de wedstrijd tegen Glacierhampton met 1:3.

Oplossing

Icetown heeft één wedstrijd verloren en twee wedstrijden gewonnen. Op grond van het doelsaldo 5:1 van Icetown concluderen we dat 1:0 de uitslag was van zijn verloren wedtsrijd.We analyseren nu de drie gevallen: Icetown verliest van Coldburry, Icetown veliest van Glacierhapton en Icetown verliest van Frostcille. Gemakshalve hebben we de volgende afkortingen voor de clubs ingevoerd: I=Icetown, F=Frostville, G=Glaciehampton en C=Coldbury.

Icetown verliest van Coldburry

De tabel hieronder geeft van de clubs in de rijen aan hoeveel doelpunten zij gescoord hebben tegen de clubs in de kolommen.

Team	I	F	G	C
I	X	x	u	0
F	0	X	α	β
G	0	γ	X	δ
C	1	ε	ν	X

Zo lezen we uit de tabel af dat Icetown x doelpunten heeft gescoord tegen Frostville en dat Frostville 0 doelpunten heeft gescoord tegen Icetown. De uitslag Icetown tegen Frostville is dus x:0. Omdat I en F elk twee wedstrijden hebben gewonnen geldt dat $u \geq 1$, $x \geq 1$, $\alpha \geq 1$ en $\beta \geq 1$.I heeft in totaal slechts één doelpunt tegen en dat is dan in de verloren wedstrijd tegen C. De uitslag van die wedstrijd is dan $1 : 0$. De voorlopige uitslagentabel ziet er dan als volgt uit.
De kolom van de doelpunten voor en tegen in de tabel van de opgave leidt tot het volgende stelsel van vergelijkingen.

$$\begin{aligned} u+x &= 5 \\ \alpha+\beta &= 3 \\ \gamma+\delta &= 5 \\ \epsilon+\nu &= 3 \\ x+\gamma+\epsilon &= 5 \\ u+\alpha+\nu &= 6 \\ \beta+\delta &= 5 \end{aligned}$$

De algemene oplossing van dit stelsel luidt

$$\begin{aligned} u &= 5-\mu \\ x &= \mu \\ \alpha &= 1-\lambda \\ \beta &= 2+\lambda \\ \gamma &= 2+\lambda \\ \delta &= 3-\lambda \\ \epsilon &= 3-\lambda-\mu \\ \nu &= \lambda+\mu \end{aligned}$$

De voorlopige uitslagen tabel ziet er dan als volgt uit:

I:F	μ:0
I:G	$(5-\mu)$:0
I:C	0:1
F:G	$(1-\lambda)$:$(2+\lambda)$
F:C	$(2+\lambda)$:$(3-\lambda-\mu)$
G:C	$(3-\lambda)$:$(\lambda+\mu)$

I verliest van C en wint derhalve van F en G: $\mu \geq 1$ en $\mu \leq 4$
F verliest van I en wint derhalve van G en C: $\lambda \leq -1$ en $2\lambda - \mu \leq -2$

C verliest van F en G: $2\,\lambda + \mu \geq 2$ en $2\,\lambda + \mu \leq 2$

Samenvattend:
$1 \leq \mu \leq 4$
$\lambda \leq -1$
$2\,\lambda - \mu \leq -2$
$2\,\lambda + \mu = 2$

Bij oneven μ is λ halftallig, dus deze optie vervalt. Als $\mu = 2$ dan is $\lambda = 0$ in strijd met $\lambda \leq -1$ en als $\mu = 4$ dan is $\lambda = -1$, maar dan komt de uitslag 1:0 dubel voor.
De conclusie is dat I van C heeft gewonnen.

Icetown verliest van Glacierhampton

Dit betekent dat I de wedstrijd tegen G met 1:0 heeft verloren en van F en C heeft gewonnen zonder tegendoelpunten. Derhave heeft F de wedstrijden tegen G en C gewonnen.en moet dan in beide wedstrijden minstens eemaal hebben gescoord; $\alpha \geq 1$ en $\beta \geq 1$. De scoretabel hieronder geeft de stand van zaken weer.

Team	I	F	G	C
I	X	x	0	u
F	0	X	α	β
G	1:0	γ	X	δ
C	0	ε	ν	X

De voor- en tegendoelpunten leveren nu het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$
\begin{aligned}
u + x &= 5 \\
\alpha + \beta &= 3 \\
\gamma + \delta &= 4 \\
\epsilon + \nu &= 4 \\
x + \gamma + \varepsilon &= 5 \\
\alpha + \nu &= 6 \\
u + \beta + \delta &= 5
\end{aligned}
$$

Omdat $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ en $\alpha + \beta = 3$ zijn de enige twee mogelijkheden: $((\alpha, \beta) = (1, 2)$ of $(\alpha, \beta) = (2, 1)$.

$\alpha = 1, \beta = 2$

De vergelijkingen impliceren nu dat $\nu = 5$ instrijd met de vergelijking $\epsilon + \nu = 4$. We concluderen dat $\alpha = 2$ niet mogelijk is.

$\alpha = 2, \beta = 1$

Icetown verliest van Frostville

Team	I	F	G	C
I	X	0	x	u
F	1	X	α	β
G	0	γ	X	δ
C	0	ε	ν	X

Bij deze tabel hoort de volgende uitslagenlijst:

I:F	0:1
I:G	x:0
I:C	u:0
F:G	$\alpha : \gamma$
F:C	$\beta : \epsilon$
G:C	$\delta : \mu$

De voor- en tegendoelpunten leveren nu het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$
\begin{aligned}
u + x &= 5 \\
\alpha + \beta &= 2 \\
\gamma + \delta &= 5 \\
\epsilon + \nu &= 4 \\
\gamma + \epsilon &= 5 \\
x + \alpha + \nu &= 6 \\
u + \beta + \delta &= 5
\end{aligned}
$$

De tweede vergelijking geeft de opties: $(\alpha, \beta) = (2, 0), (1, 1), (0, 2)$, die we elk afzonderlijk gaan analyseren.

$\alpha = 2, \beta = 0$

Uit de vergelijkingen volgt dat $x = \delta$, $\gamma = 5 - \delta$, $\epsilon = \delta$ en $\nu = 4 - \delta$. De wedstrijden I:G en F:C hebben dezelde uitslagen $\delta : 0$. Dus deze optie vervalt.

$\alpha = 1, \beta = 1$

Uit de vergelijkingen volgt dat $u = 4-\delta$,$x = 1+\delta$, $\gamma = 5-\delta$ $\epsilon = \delta$ en $\nu = 1+\delta$. De mogelijkheden $\delta = 0, 1, 2, 3en4$ leiden allen tot niet geoorloofde uitslagen.

$\alpha = 0, \beta = 2$

Uit de vergelijkingen volgt dat $u = 3 - \delta$. $x = 2 + \delta$,$\gamma = 5 - \delta$, $\epsilon = \delta$ en $\nu = 4 - \delta$. Van de mogelijkheden $\delta = 0, 1, 2$ of δ=3, is alleen $\delta = 1$ toegestaan. Dit levert dan ook de oplossing van het probleem. Het uiteindelijke resultaat is samengevat in de uitslagen tabel:

I:F	0:1
I:G	3:0
I:C	2:0
F:G	0 : 4
F:C	2 : 1
G:C	1 : 3

We zien dat Coldbury de wedtrijd tegen Glacierhampton met 3:1 heeft gewonnen. Dus bewering 9 is juist.